они вписаны, есть не менее $(101 - n_0) + 5 = 106 - n_0$ пустых соседних. Нам предстоит, таким образом, вписать в таблицу число, которое не меньше чем $106 - n_0$, причем рядом с числом, которое не меньше чем n_0. Сумма этих двух чисел будет не меньше чем $106 - n_0 + n_0 = 106$, что противоречит нашему предположению о том, что $S \le 105$.

Д.Храмцов, Д.Фон-дер-Флаас

М1613*. *На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:*
1° снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n и положить один камень в клетку $n + 1$;
2° снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n + 1$, $n - 2$.
Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

Обозначим через a_i количество камней в клетке с номером i. Тогда последовательность $A = (a_i)$ задает конфигурацию — расположение камней по клеткам. Назовем весом конфигурации A число $w(A) = \sum a_i\lambda^i$, где число $\lambda > 0$ выбрано так, что разрешенные действия не меняют веса конфигурации. Для этого достаточно взять λ равным большему корню уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, т.е. $\lambda = (\sqrt{5}+1)/2$. Действительно, $\lambda^{n+1} - \lambda^n - \lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$, $\lambda^{n+1} - 2\lambda^n + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$.

Докажем индукцией по k — числу камней, что любая последовательность действий завершается. При $k = 1$ это верно. Пусть k — наименьшее, при котором для какой-то конфигурации $A = (a_i)$ с $\sum a_i = k$ есть бесконечная последовательность действий. Наибольший номер непустой клетки при разрешенных действиях не уменьшается, но и расти бесконечно он не может — он не может превысить числа n, при котором $\lambda^n > w(A)$. Значит, с какого-то момента наибольший номер непустой клетки перестает изменяться, и с камнями, попавшими в эту клетку, уже ничего не происходит. Выбросим эти камни и применим предположение индукции к оставшимся.

В конечной конфигурации в каждой клетке не более одного камня, и нет двух непустых клеток подряд. Докажем, что любые две конфигурации $A = (a_i)$ и $B = (b_i)$ с такими свойствами имеют разные веса. Пусть n — наибольший номер, при котором $a_i \ne b_i$; пусть $a_n = 1$, $b_n = 0$. Выбросим из A и B все камни с номерами, большими n (они в A и B совпадают). Для оставшихся конфигураций A' и B' имеем

$$w(A') \ge \lambda^n;$$

$$w(B') < \lambda^{n-1} + \lambda^{n-3} + \lambda^{n-5} + \ldots = \lambda^{n-1}\frac{1}{1-\lambda^{-2}} = \lambda^n.$$

Д.Фон-дер-Флаас

М1614. *На плоскости расположены $2n + 1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n + 1)(2n + 1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.*

Можно считать, что среди прямых нет ни параллельных, ни перпендикулярных и никакие три прямые не пересекаются в одной точке (другими словами, любые три прямые образуют треугольник, причем либо остроугольный, либо тупоугольный). Действительно, выполнения этого условия можно добиться, поворачивая прямые на сколь угодно маленькие углы, а при достаточно малых углах поворота существующие остроугольные треугольники не перестанут быть остроугольными, так что число остроугольных треугольников не уменьшится.

Пусть A и B — количества соответственно остроугольных и тупоугольных треугольников на картинке. Будем называть треугольник, образованный прямыми a, b, c, *частично остроугольным относительно* a, если его углы при стороне, лежащей на a, оба острые. Выберем произвольную прямую l из нашего набора и повернем картинку так, чтобы l стала горизонтальной осью. Остальные $2n$ прямых разбиваются на два класса: прямые с положительным коэффициентом наклона и прямые с отрицательным коэффициентом наклона. Нетрудно видеть, что две прямые образуют вместе с l частично остроугольный относительно l треугольник тогда и только тогда, когда они принадлежат разным классам. Поэтому количество таких треугольников равно произведению количеств прямых в двух классах, что по неравенству о средних не превосходит n^2. Сложив такие оценки для всех прямых, получаем, что количество пар «прямая и частично остроугольный относительно нее треугольник» не превосходит $n^2(2n + 1)$. В этом количестве каждый остроугольный треугольник учитывается три раза, а тупоугольный — один раз, значит,

$$3A + B \le n^2(2n+1).$$

Общее число треугольников равно количеству троек прямых, т.е.

$$A + B = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}.$$

Вычтем это тождество из предыдущего неравенства:

$$2A \le \frac{3n^2(2n+1)}{3} - \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{3}.$$

Таким образом, $A \le n(n+1)(2n+1)/6$, что и требовалось.

Замечание 1. Оценка $n(n+1)(2n+1)/6$ — точная: существуют расположения прямых, в которых ровно такое количество остроугольных треугольников. Примером служит набор из $2n + 1$ прямых, содержащих стороны правильного $(2n + 1)$-угольника. Предлагаем читателям ответить на вопрос: какова точная оценка для $2n$ прямых?

Замечание 2. Задача имеет следующую эквивалентную переформулирову: для набора из $2n + 1$ точек на окружности не более $n(n+1)(2n+1)/6$ треугольников с вершинами в этих точках содержат центр окружности в качестве внутренней точки. Для доказательства экви-