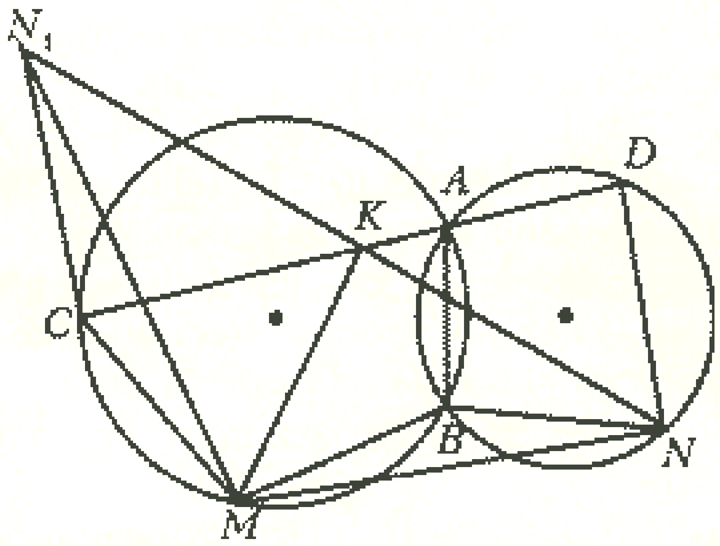
тать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно K (см. рисунок). Тогда $\Delta KCN_1 = \Delta KDN$, поэтому



$CN_1 = ND$ и $\angle N_1CK = \angle NDK = \pi - \angle ABN$. Заметим еще, что $\angle MCK = \pi - \angle ABM$. Складывая полученные равенства, находим, что $\angle N_1CM = \angle MBN$. Кроме того, из условия следует, что $CM = MB$ и $BN = ND$ (т.е. $BN = CN_1$). Значит, $\Delta MCN_1 = \Delta MBN$, откуда $MN_1 = MN$. Отрезок MK — медиана в равнобедренном треугольнике MNN_1, поэтому $\angle MKN = 90°$.

Замечание. Задача имеет много других решений. Например, можно воспользоваться подобием треугольников MEK и KFN, где E и F — середины отрезков BC и BD соответственно. Эти треугольники имеют две пары взаимно перпендикулярных сторон: EK и FN, ME и KF; следовательно, перпендикулярны и их третьи стороны.

Кроме того, соображения, использующие композицию поворотов, позволяют отказаться от дополнительного условия в задаче (о том, что точки C и D лежат по разные стороны от A), которое было задано лишь затем, чтобы избежать разбора различных случаев. Действительно, рассмотрим композицию поворотов $R_M^\beta \circ R_N^\alpha$ — на углы $\alpha = \angle DNB$ и $\beta = \angle BMC$ вокруг точек N и M соответственно (углы предполагается ориентированными). Заметим, что $\alpha + \beta = 180°$, поэтому $R_M^\beta \circ R_N^\alpha = Z_x$ — центральная симметрия относительно некоторой точки X. Но

$$Z_X(D) = \left(R_M^\beta \circ R_N^\alpha\right) = R_M^\beta(B) = C,$$

поэтому X — середина отрезка CD, т.е. точка K. Если $N_1 = Z_K(N)$, то $N_1 = \left(R_M^\beta \circ R_N^\alpha\right)(N) = R_M^\beta(N)$, т.е. ΔNMN_1 равнобедренный и $\angle MKN = 90°$.

Д.Терешин

M1612*. *В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, 3, ..., 100 так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S. (Числа называются соседними, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.)*

Ответ. 106. Пример расстановки, для которой $S = 106$, приведен на рисунке (этот пример, где наибольшие числа в «черных» клетках соседствуют с наименьшими в «белых»). Докажем теперь, что $S \ge 106$ для любой расстановки чисел в таблице. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если в прямоугольнике 2×10 отмечено $1 \le n \le 9$ попарно несоседних клеток, то число неотмеченных клеток прямоугольника, соседних с отмеченными, больше n.*

Доказательство. В каждом из 10 прямоугольничков 1×2, длинные стороны которых параллельны коротким сторонам прямоугольника 2×10, отмечено не более одной клетки. Если одна клетка в таком прямоугольничке отмечена, то другая — неотмеченная, соседняя с отмеченной. Тем самым мы уже имеем n таких клеток, а поскольку $n \le 9$, то (при $n \ge 1$) найдется, очевидно, и клетка, принадлежащая прямоугольничку 1×2 без отмеченных клеток, граничащая с отмеченной клеткой соседнего прямоугольничка 1×2. Следовательно, общее число неотмеченных клеток, соседних с отмеченными, больше n, что и требовалось доказать.

46	55	47	54	48	53	49	52	50	51
60	41	59	42	58	43	57	44	56	45
36	65	37	64	38	63	39	62	40	61
70	31	69	32	68	33	67	34	66	35
26	75	27	74	28	73	29	72	30	71
80	21	79	22	78	23	77	24	76	25
16	85	17	84	18	83	19	82	20	81
90	11	89	12	88	13	87	14	86	15
6	95	7	94	8	93	9	92	10	91
100	1	99	2	98	3	97	4	96	5

Допустим, что $S \le 105$ для некоторой расстановки чисел. Стерев все числа в таблице, будем вписывать их на прежние места, начиная с числа 100, в порядке убывания.

Выделим в таблице пять неперекрывающихся горизонтальных полос размерами 10×2 клеток и пять неперекрывающихся вертикальных полос 2×10 клеток. Зафиксируем число n_0, после вписывания которого впервые либо в каждой горизонтальной, либо в каждой вертикальной полосе окажется не меньше одного вписанного числа; соответствующий момент назовем критическим. Пусть уже вписаны 33 числа от 100 до 68, но есть пустые горизонтальная и вертикальная полосы. Те 64 клетки таблицы, которые не входят в эти полосы, можно разбить на 32 прямоугольничка 1×2, хотя бы в одном из них окажутся два вписанных числа с суммой не меньше чем $68 + 69 > 105$. Отсюда следует, что $n_0 \ge 68$.

Заметим, что в критический момент в каждую из полос вписано меньше 10 чисел (если бы нашлась, например, горизонтальная полоса, в которую вписано не меньше 10 чисел, то перед вписыванием числа n_0 в ней было бы не меньше 9 чисел, в силу чего в каждой из вертикальных полос было бы минимум по одному числу, что противоречит определению числа n_0). Поэтому к полосам того направления, в которых в критический момент оказалось хотя бы по одному числу, можно применить лемму.

Поскольку в критический момент в таблицу вписано $101 - n_0$ чисел, из леммы следует, что у клеток, куда