По условию a и b отличны от нуля. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + ax + b = 0$, то $1/x_1$ и $1/x_2$ — корни уравнения $bx^2 + ax + a = 0$. Таким образом, уравнения

$$ax^2 + bx + b = 0 \text{ и } bx^2 + ax + a = 0$$

имеют общий корень. Тот же корень имеет и их сумма: $(a+b)(x^2+x+1) = 0$. Поскольку $x^2 + x + 1 \neq 0$ (речь идет о вещественных корнях), то $b = -a$ и трехчлены в условии задачи имеют вид $ax^2 - ax - a$ и $ax^2 + ax - a$, а искомые корни равны $(\sqrt{5}+1)/2$ и $(\sqrt{5}-1)/2$ либо $(-\sqrt{5}+1)/2$ и $(-\sqrt{5}-1)/2$.
Вместо суммы двух равенств можно рассмотреть произведение равенств

$$ax^2 = -(bx+b) \text{ и } bx^2 = -(ax+a),$$

которое после сокращения на $ab \neq 0$ приводится к виду $x^4 = (x+1)^2$, откуда $x^2 - x - 1 = 0$.

С.Берлов, В.Сендеров

М1608. *На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.*

Нетрудно доказать по индукции, что если n хоров исполняют по три песни, каждая из которых может быть оскорбительной для одного из остальных хоров, то выступления хоров можно организовать в таком порядке, что каждый хор до своего выступления услышит не более трех оскорбительных песен.
Для $n = 1$ и $n = 2$ это очевидно. Если хоров n, то всего оскорбительных песен не более $3n$, и значит, найдется хор, на долю которого приходится не более трех оскорблений. Пусть этот хор выступает последним. Для остальных $n - 1$ хоров выполнено то же условие и, по предположению индукции, их выступления можно организовать требуемым образом.
Конечно, число 3 в условии можно заменить на любое натуральное s.

Ф.Назаров

М1609. *Пусть $P(x)$ — а) квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами, б) произвольный многочлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство*

$$\left(P(xy)^2\right) \le P\left(x^2\right) \cdot P\left(y^2\right).$$

Пусть коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ многочлена $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \ldots + a_nt^n$ неотрицательны. Положим $b_k = \sqrt{a_k}x^k$; $c_k = \sqrt{a_k}y^k$; $k = 0, 1, \ldots, n$. Неравенство, которое требуется доказать, имеет вид

$$\left(b_0c_0 + b_1c_1 + \ldots + b_nc_n\right)^2 \le \left(b_0^2 + b_1^2 + \ldots + b_n^2\right)\left(c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2\right). \quad (*)$$

Последнее неравенство (оно называется неравенством *Коши — Буняковского*) справедливо для любых значений переменных (и обращается в равенство только если «векторы» $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ и $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ пропорциональны — один из них получается умножением всех координат другого на одно и то же число). Одно из самых простых доказательств неравенства (*): рассмотреть квадратный трехчлен

$$Q(t) = \left(b_0t + c_0\right)^2 + \left(b_1t + c_1\right)^2 + \ldots + \left(b_nt + c_n\right)^2,$$

очевидно неотрицательный при всех t, и записать условие, что дискриминант этого трехчлена $Q(t) = At^2 + Bt + C$ неположителен, т.е. $B^2 \le 4AC$.

Е.Малинникова, Н.Васильев

М1610. *Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак а) белого или черного; б) белого, синего или красного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих позади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить только один раз). После этого король казнит всех мудрецов, не угадавших цвет своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?*

Ответ на оба вопроса а) и б) одинаков: для любого количества n мудрецов все, кроме одного — последнего, могут избежать казни. (Разумеется, последний не может иметь гарантии спасения, поскольку его колпак не видит никто.) В случае а) достаточно соображения четности — сложения по модулю 2, в случае б) помогает сложение по модулю 3.
Покажем, как могут действовать мудрецы, сначала — на более простом примере.
а) Пусть белый и черный цвета обозначаются числами 0 и 1, а x_k — число, означающее цвет колпака k-го мудреца. Каждый из мудрецов может посчитать четность количества черных колпаков у стоящих перед ним, другими словами — остаток при делении на 2 суммы соответствующих чисел; обозначим это число для k-го мудреца через s_{k-1} ($k = 2, 3, \ldots, n$): $s_{k-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}$ по модулю 2. Пусть сначала n-й мудрец называет s_{n-1}. Затем, зная s_{n-1} и s_{n-2}, стоящий перед ним $(n-1)$-й называет свое число x_{n-1} (оно равно разности $s_{n-1} - s_{n-2}$ по модулю 2). Затем, зная s_{n-1}, x_{n-1} и s_{n-3}, $(n-2)$-й называет свое число x_{n-2} (оно равно $s_{n-1} - x_{n-1} - s_{n-3}$ по модулю 2), затем $(n-3)$-й называет свое число $x_{n-3} \equiv s_{n-1} - x_{n-1} - x_{n-2} - s_{n-4} \pmod 2$ и так далее вплоть до $x_1 \equiv s_{n-1} - x_{n-1} - \ldots - x_2$.
б) Рассуждения совершенно аналогичны: достаточно трем цветам сопоставить числа 0, 1, 2 и считать суммы и разности по модулю 3, т.е. остатки соответствующих чисел при делении на 3.

Н.Васильев

М1611. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно счи-*