изображение на экране треугольника Конвея.

И вообще, пусть F — самоподобная фигура, $F = F_1 \cup \ldots \cup F_m$ и $h_1 \ldots h_m$ — преобразования подобия, переводящие фигуру F в подобные составляющие $F_1, \ldots, F_m$. Игра «Хаос» замечательна тем, что, используя в ней преобразования h_i, можно получить на экране фигуру F.

Для того чтобы получить мозаику, будем раскрашивать точку $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ в зависимости от значения выпавшего числа α_n. Давайте сопоставим числу 1 зеленый цвет, числу 2 — красный, 3 — синий, 4 — оранжевый и, наконец, 5 — серый. Будем теперь окрашивать точку $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ в цвет, соответствующий числу α_n. Тогда на дисплее мы получим цветную картинку (рис.14, *а*). Это — первый фрагмент самоподобной мозаики Конвея. Если же точку x_n окрашивать в цвет, соответствующий номеру α_{n-1}, то мы получим более детальный портрет той же мозаики в цвете (рис. 14, *б*). Еще более дробный фрагмент получается, если каждую точку x_n окрашивать в цвет, соответствующий номеру α_{n-2} (рис. 14, *в*) и т.д.

Задача Конвея

Подведем некоторые итоги. Итак, если многоугольник самоподобен, то его копиями можно заполнить всю плоскость. Причем если мозаика из этих многоугольников строго иерархична, то она непериодична. Таковы, например, самоподобные мозаики, составленные из «стульев». Однако было бы ошибочно думать, что из «стульев» можно составить лишь непериодические мозаики. На рисунке 15 представлена простенькая мозаика из «стульев», которая является периодической. Таким образом, самоподобные многоугольники наряду со строго иерархическими мозаиками, которые непериодичны, могут допускать также и периодические мозаики.

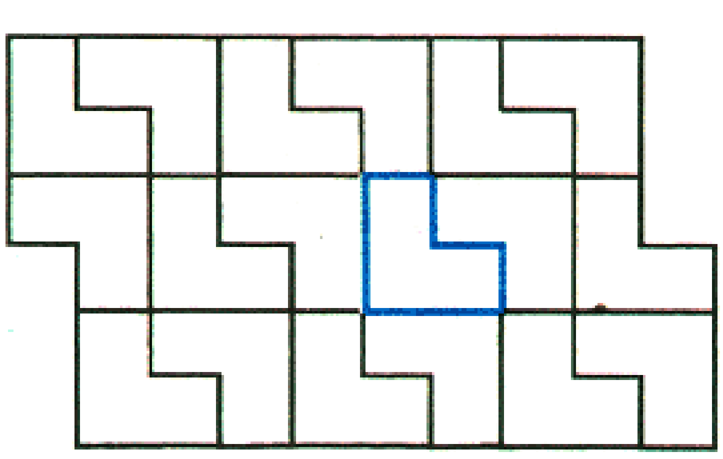

Рис. 15

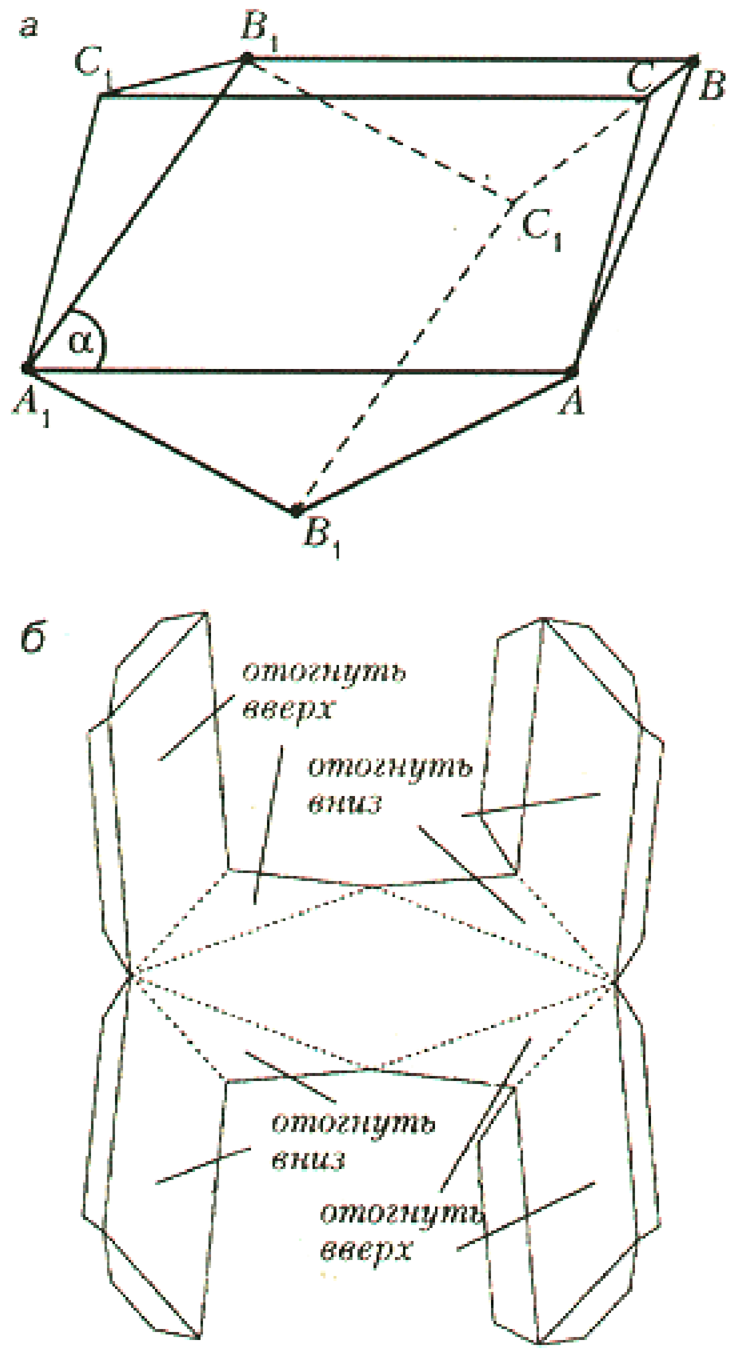

Рис. 16

Джон Конвей поставил вопрос: существует ли на плоскости такая многоугольная или даже криволинейная фигура, из которой можно составить лишь **НЕ**периодические мозаики? Любопытно, что в пространстве на подобный вопрос недавно был получен положительный ответ: да, существует. Это — так называемая бипризма Шмитта — Конвея — Данцера (рис.16, *а*). Склеить ее можно из выкройки, представленной на рисунке 16, *б* (заметим, что это — не развертка многогранника в обычном ее понимании, так как в выкройку входит ромб, который является не гранью призмы, а вспомогательным элементом конструкции).

Бипризма определяется следующим образом. Возьмем сначала треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$, у которой боковая грань ABB_1A_1 есть ромб (с острым углом α). Теперь приставим к ромбовидной боковой грани такую же призму, повернув исходную призму на угол 180° вокруг диагонали ромбической грани. Заметим, что боковые ребра второй призмы составляют угол α с боковыми ребрами первой призмы. Пара так приставленных друг к другу призм составляет искомую *бипризму*.

Нетрудно убедиться в том, что бипризма разбивает пространство, т.е. заполняет его без пропусков и перекрытий. И устройство всех таких мозаик во многом предопределено. Действительно, если мы хотим заполнить пространство такими бипризмами, мы должны прежде всего составить из них слой (рис.17, *а*). Все бипризмы в данном слое параллельны друг другу. Более того, слой представляет собой периодическое семейство бипризм. Далее все пространство заполняется такими слоями (рис.17, *б*). Очевидно, что каждый следующий слой получается из предыдущего поворотом вокруг перпендикулярной (к плоскости слоя) оси на угол, равный острому углу ромба, с последующим параллельным переносом. Поэтому если угол ромба несоизмерим с π, т.е. если $\alpha \neq \frac{m}{n} \cdot \pi$, то никакие две бипризмы из разных слоев не параллельны друг другу. С другой стороны, любой параллель-

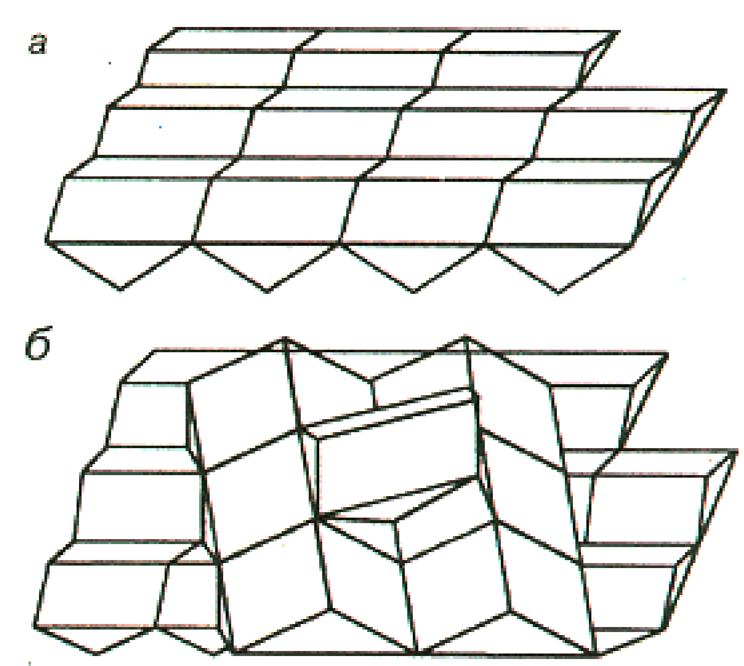

Рис. 17

ный перенос, который совмещает один слой с самим собой, не совмещает, как нетрудно видеть, никакой другой слой с собой. Таким образом, при $\alpha \neq \frac{m}{n} \cdot \pi$ не существует ни одного (!) параллельного переноса, который бы совмещал это разбиение с собой.

Однако неизвестно, существует ли аналогичная фигура на плоскости. Однако не исключено, что таких так называемых *«апериодических»* плиток на евклидовой плоскости нет, т.е. если фигура допускает какие-то мозаики, то среди них будет непременнно и периодическая.

Заметим, что аналог «апериодической» плитки на плоскости Лобачевского уже найден. И будет замечательно, если кто-нибудь из читателей «Кванта» откроет *«апериодическую»* плитку на евклидовой плоскости.