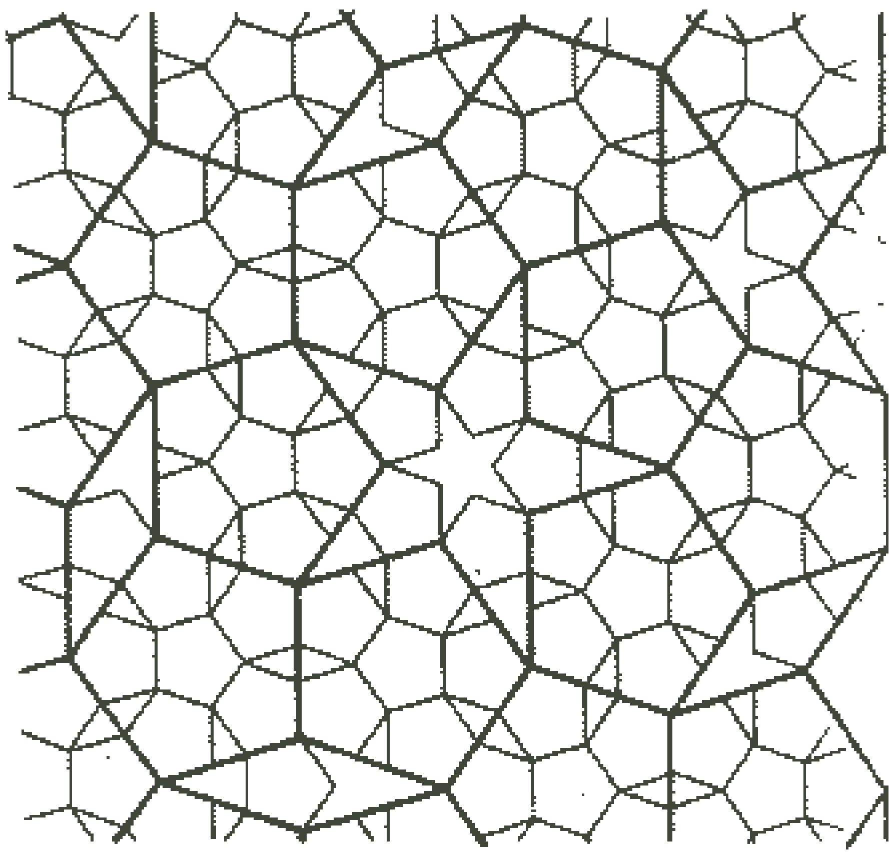

Рис. 11

как в этом случае восстановление мозаики каждого следующего уровня по предыдущему происходит вполне однозначно, то строго иерархическая мозаика, например такая, как «стул», на первый взгляд, должна определяться однозначно. Однако, как раз наоборот, разных самоподобных мозаик, составленных из плиток «стул», бесконечно много. Более того, их даже несчетно много. Уточним, что две (бесконечные) мозаики на плоскости считаются *одинаковыми*, если одну из них можно совместить с другой некоторым движением плоскости. В противном случае мозаики считаются разными.

Объясним, например, почему из «стульев» получается несчетное множество самоподобных мозаик. Разобьем «стул» на 4 «стульчика» и каждому из них припишем одно из четырех чисел 1, 2, 3 или 4, как показано на рисунке 7, б. Пусть «стул» на первом этапе ди-процесса входит в больший «стул» под номером a_1. В свою очередь, на 2-м этапе ди-процесса этот «стул» входит под некоторым номером a_2 в «стул» следующего уровня и т.д. Таким образом, мозаика, вырастающая из данного «стула», определяет некоторую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, состоящую из чисел 1, 2, 3, 4. Та же мозаика может вырасти из любой другой ее плитки. При этом получится другая последовательность. Так как число плиток в данной мозаике счетно, а различных последовательностей несчетно много, то и различных самоподобных мозаик из «стульев» несчетно много.

Так как строго иерархических мозаик, которые можно составить из данной самоподобной плитки, **несчетно много**, то все такие мозаики нельзя занумеровать одними лишь натуральными числами, как элементы последовательности, но можно «занумеровать» при помощи действительных чисел.

Допустим, что все мозаики из несчетной семьи «Стул» уже получили свои имена в виде действительных чисел, и теперь мы хотели бы составить их семейный альбом. Каждая мозаика — бесконечна, и уместить ее на «фотографии» ограниченного размера невозможно. «Портрет» мозаики — это, разумеется, некоторый ограниченный ее фрагмент. Поэтому портретов у данной мозаики может быть много, даже бесконечно много. Допустим теперь, «фотограф» уже отобрал в этот альбом по портрету для каждой из мозаик, но, забыв вовремя подписать фотографии, написал имена в альбоме наобум. Как это ни удивительно, но по существу никакой крамолы он при этом не совершил. Дело в том, что *любой конечный фрагмент, который можно встретить в какой-нибудь мозаике из семейства «Стул», можно встретить также в* **любой** *другой мозаике из этого семейства*, причем встретить его в каждой мозаике бесконечно много раз.

Таким образом, все строго иерархические мозаики из одной семьи, хотя в целом, т.е. глобально, отличаются друг от друга, локально выглядят как «близнецы-братья».

Мозаики Конвея

Напомним, что самоподобная мозаика может быть периодической. Если же она имеет строгую иерархию, то она непериодическая. Однако несмотря на НЕпериодичность рассматривавшихся нами строго иерархических мозаик плитки в них имели лишь конечное число положений с точностью до параллельного переноса. Так, в случае «домино» все (прямоугольные) плитки «рассыпались» на два класса параллельных друг другу плиток, в случае «стула» — на четыре.

Задача 4. Сколько классов параллельных между собой плиток в иерархической мозаике «сфинкса»?

Вопрос: существует ли мозаика, составленная по-прежнему из идентичных плиток, однако такая, что плитки эти уже ориентированы в мозаике бесконечным числом способов? В 1992 году Конвей предложил самоподобную мозаику со строгой иерархией, в которой все плитки суть равные треугольники, допускающие однако бесконечное число различных ориентаций. Идея очень проста: возьмем прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 и гипотенузой $\sqrt{5}$. Он допускает самоподобное разбиение на 5 равных треугольников (рис.12,*а*, *б*). Острый угол α треугольника равен $\alpha = \operatorname{arctg} 1/2$. Указанное разбиение треугольника Конвея индуцирует самоподобные мозаики — мозаики Конвея.

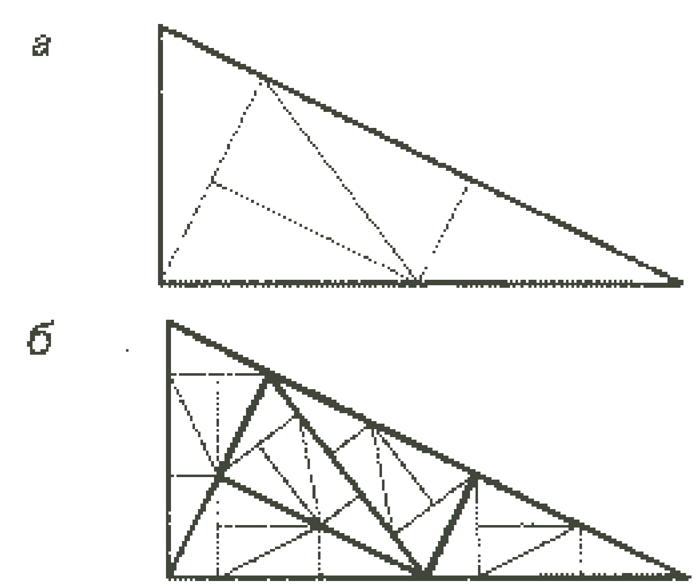

Рис. 12

Легко видеть, что в мозаике Конвея для любой ее треугольной плитки и любого целого m всегда найдется другая плитка, повернутая относительно первой на угол $m \cdot \alpha$. Однако, как можно показать, угол α несоизмерим с 2π (см. задачу ниже). Тогда любые два треугольника, повернутые относительно друг друга на $m \cdot \alpha$, $m \neq 0$, не параллельны друг другу. Поэтому в мозаике Конвея треугольные плитки встречаются в бесконечно многих ориентациях.

В действительности, все мозаики Конвея — самоподобные мозаики со строгой иерархией, поэтому их бесконечно, даже несчетно, много, и во всех них треугольники присутствуют с бесконечно многими ориентациями.

Задача 5. Докажите, что угол $\operatorname{arctg} 1/2$ несоизмерим с π, т. е. что уравнение $n \cdot \operatorname{arctg} 1/2 = m \cdot \pi$ не имеет решений в натуральных числах (m, n).

Отметим еще раз основное свойство мозаики Конвея: для любого возможного положения треугольника Конвея Δ на плоскости и любого маленького положительного значе-