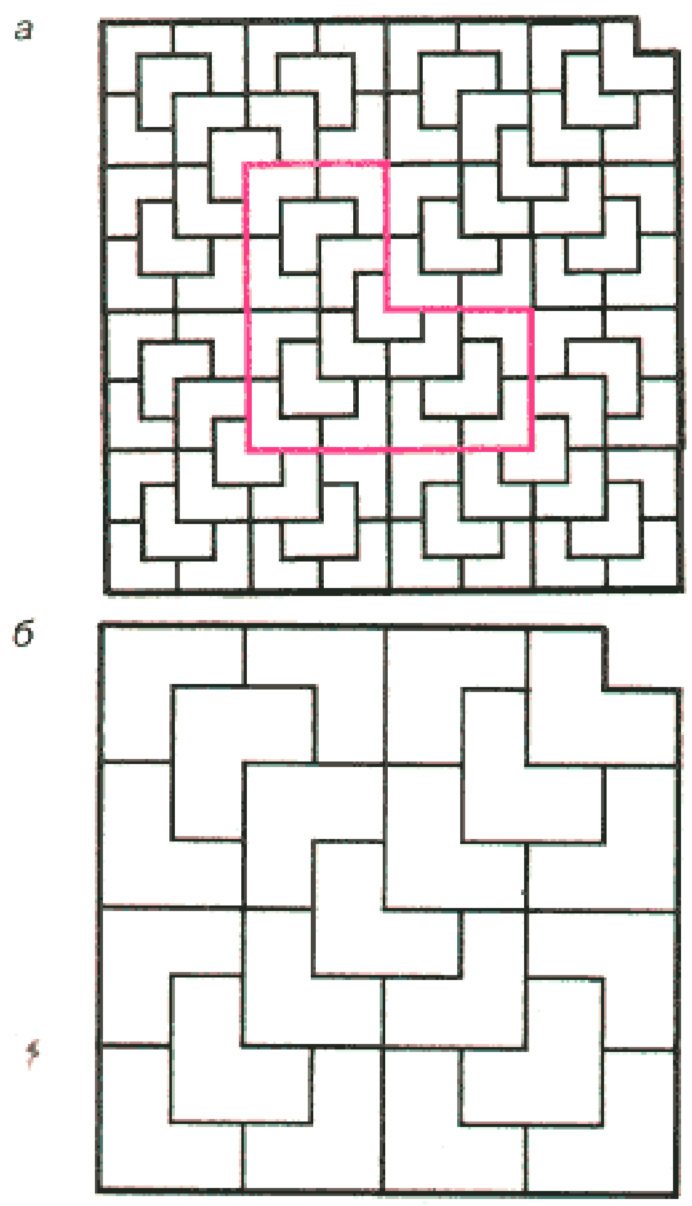

Рис. 8

дующего уровня компонуется из плиток мозаики предыдущего уровня *единственным* способом. При *слабой* иерархии плитки мозаики могут объединяться в плитки мозаики следующего уровня *несколькими разными* способами.

Строгий или слабый характер иерархии во многом определяется самой фигурой F. Так, квадрат определяет слабую иерархию. Действительно, мозаика из квадратов (рис.9, *а*) может быть укрупнена в мозаику 2-го уровня разными способами, так что данный квадрат A 1-го уровня может входить в плитки мозаики 2-го уровня различными способами (рис.9, *б*, *в*).

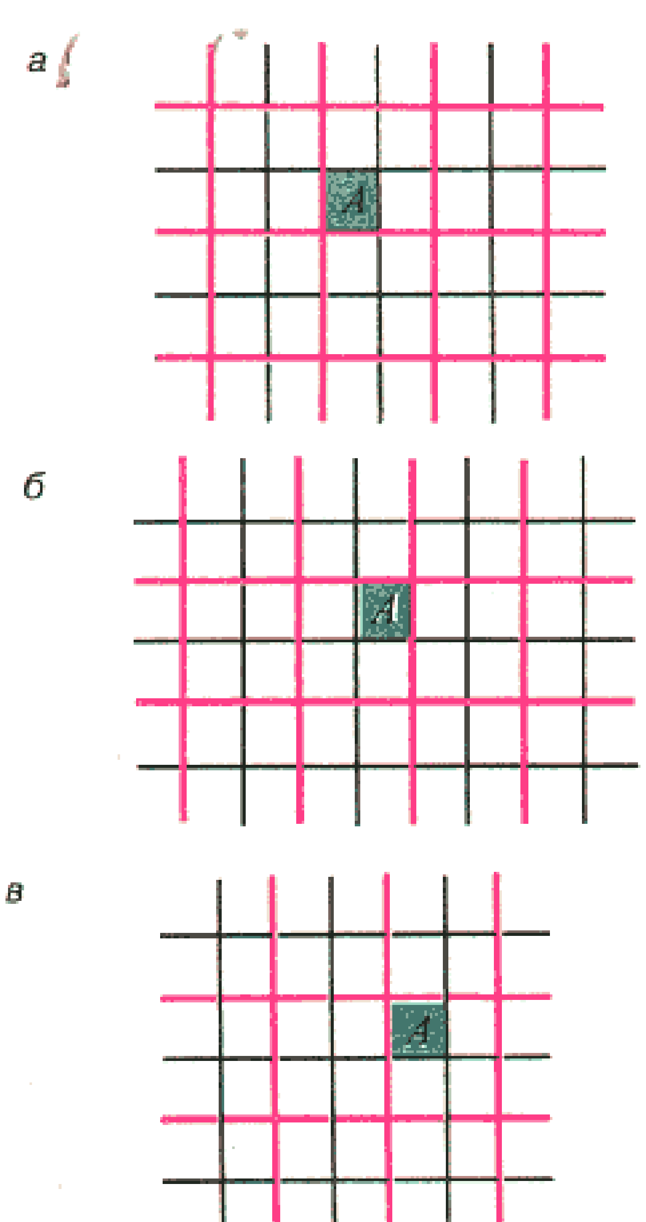

Рис. 9

А вот «стул», «сфинкс», «домино» определяют строгую иерархию. Возьмем какую-нибудь плитку «стул» в соответствующей мозаике. Он вместе с тремя другими «стульями» объединяется в «стул» 2-го уровня, причем каждая плитка 1-го уровня определяет тройку дополнительных плиток однозначно.

Тем самым укрупненная мозаика 2-го уровня определяется однозначно. Так как мозаика 2-го уровня обладает тем же свойством, то самоподобное разбиение плоскости на «стулья» — строго иерархическое.

Свойства строго иерархических мозаик

Строго иерархические мозаики обладают рядом удивительных свойств, отличающих их от слабо иерархических.

Непериодичность

Мозаика, для которой можно указать хотя бы один параллельный перенос, перемещающий ее в себя, называется *периодической*.

Слабо иерархические мозаики, как это видно на примере квадратной мозаики, могут быть периодическими. Так, любая плитка квадратной мозаики может быть параллельно перенесена в любую другую плитку вместе со всей мозаикой.

Важнейшее отличие строго иерархических мозаик — в том, что все они **непериодичны**. Причина непериодичности строго иерархических мозаик проста. Действительно, предположим, что существует параллельный перенос **t**, который передвигает всю строго иерархическую мозаику в себя. Ясно, что перенос **t** перемещает каждую плитку F_1 мозаики в какую-то другую плитку F_2. В силу однозначной определенности следующей мозаики из плиток 2-го уровня параллельный перенос **t** перемещает в себя также мозаику 2-го уровня и, вообще, мозаику любого k-го уровня. Опять, в силу того, что плитки мозаики второго уровня однозначно составляются в плитки мозаики 3-го уровня, параллельный перенос **t**, перемещающий в себя мозаику 2-го уровня, перемещает в себя мозаику 3-го уровня, и, вообще, мозаику любого уровня k.

Плитка k-го уровня в 2^{k-1} раз больше плитки мозаики 1-го уровня. Поэтому, если в плитку 1-го уровня можно поместить круг диаметром, скажем, d (рис.10, *а*), то в плитку k-го уровня можно поместить круг диаметром $2^{k-1}\cdot d$. При достаточно большом значении k диаметр $2^{k-1}\cdot d$ превзойдет длину вектора переноса

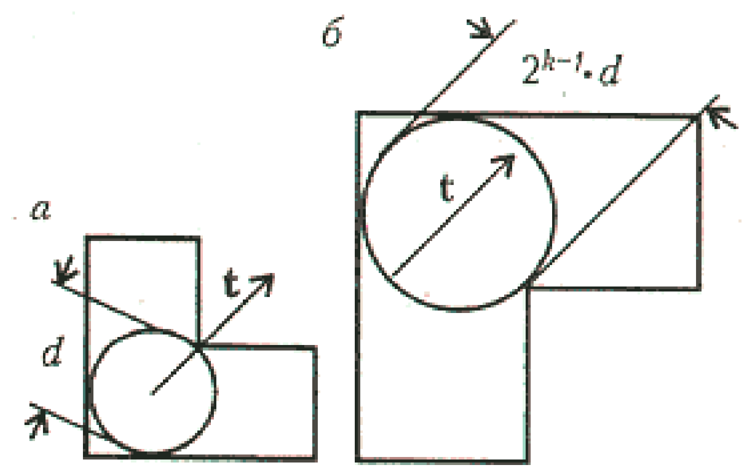

Рис. 10

t (рис.10, *б*). Это означает, что перенос на вектор **t** переводит круг радиуса $2^{k-1}\cdot d$ в круг такого же радиуса, перекрывающийся с первым. С другой стороны, эти круги должны принадлежать *разным* плиткам k-уровня и потому круги не могут пересекаться. Почему *разным*? Дело в том, что никакая *ограниченная* фигура, как нетрудно видеть, при параллельном переносе не может переходить в себя. А так как различные плитки мозаики k-го уровня не перекрываются друг с другом, то тем более не перекрываются и содержащиеся в них круги. Пришли к противоречию.

Итак, все строго иерархические мозаики непериодичны. В то время как периодические мозаики являются удобной моделью для кристаллов, строго иерархические мозаики играют важную роль в изучении квазикристаллических структур, которые были обнаружены в природе чуть более 10 лет тому назад. В отличие от кристаллических, эти структуры уже непериодичны. В частности, знаменитые узоры Пенроуза (рис.11), являющиеся наиболее известной геометрической моделью квазикристалла, представляют собой прямое обобщение строго иерархической мозаики.

«Все — на одно лицо»

Теперь еще об одной особенности мозаик со строгой иерархией. Так