Преобразование g_2, которое переводит треугольник ΔABC в ΔBDC, есть, как легко видеть, произведение **гомотетии** с центром в C и коэффициентом $k_2 = \dfrac{BC}{AC}$ и **отражения** относительно биссектрисы угла $\angle ACB$.

Обратим внимание на одно отличие этого примера от предыдущего. В случае прямоугольных треугольников коэффициенты преобразований различны по абсолютной величине.

«Домино»

Фигура «домино» состоит из двух равных квадратов и может быть опять

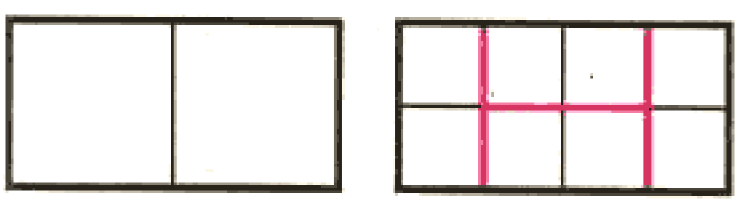

Рис. 3

разрезана на 4 подобные копии (рис. 3).

Задача 1. Определите неподвижную точку для каждого из преобразований подобия h_i.

«Стул»

Фигура «стул» (триомино) составляется из трех равных квадратов и может быть разрезана на 4 подобных копии F_1, F_2, F_3 и F_4 (рис. 4). Пусть

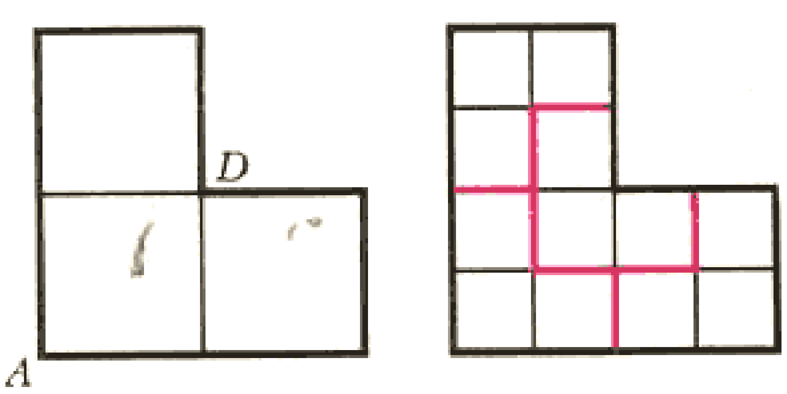

Рис. 4

h_1, h_2, h_3, h_4 — преобразования подобия, которые переводят «большой» стул в соответствующие части. Ясно, что все они имеют коэффициент $\frac{1}{2}$. При этом h_1 и h_2 являются, очевидно, гомотетиями с центрами в точках A и D соответственно.

Задача 2. Определите неподвижную точку для преобразования подобия h_3 (соответственно h_4).

«Сфинкс»

«Сфинкс» (гексамино) составляется из 6 правильных треугольников (рис. 5) и может быть разбит на 4 подобные копии (рис. 6).

Задача 3. Определите неподвижную точку для каждого из преобразований подобия h_i.

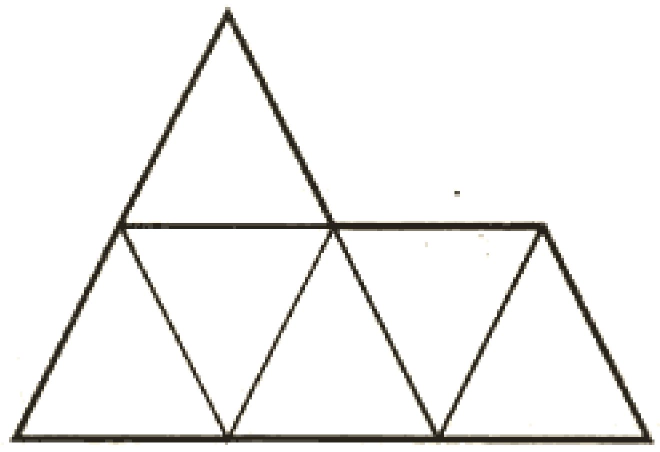

Рис. 5

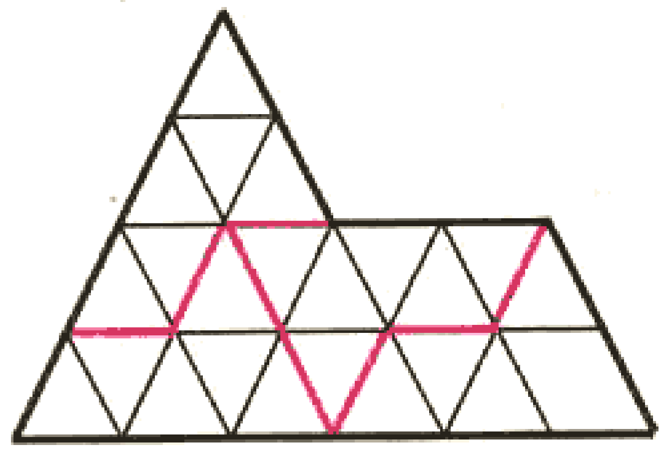

Рис. 6

Самоподобные фигуры и мозаики

Рассмотрим на плоскости какую-нибудь «хорошую» самоподобную фигуру F без дыр, такую как, например, треугольник или параллелограмм или еще какой-нибудь самоподобный многоугольник, который допускает разбиение на подобные ему и в то же время попарно равные между собой фигуры. Тогда копиями фигуры F можно замостить всю плоскость без пропусков и перекрытий. Замощение *всей* плоскости плитками без перекрытий называют *мозаикой*. Если все плитки в мозаике попарно равны, то мозаика называется *моноэдральной*.

Как получить моноэдральную мозаику, исходя из самоподобной фигуры F? Имеется несколько путей. Один из них, на первый взгляд, кажется наиболее простым, хотя в действительности содержит каверзный момент. Возьмем, например, «стул» F определенного размера (рис. 7, *а*) и

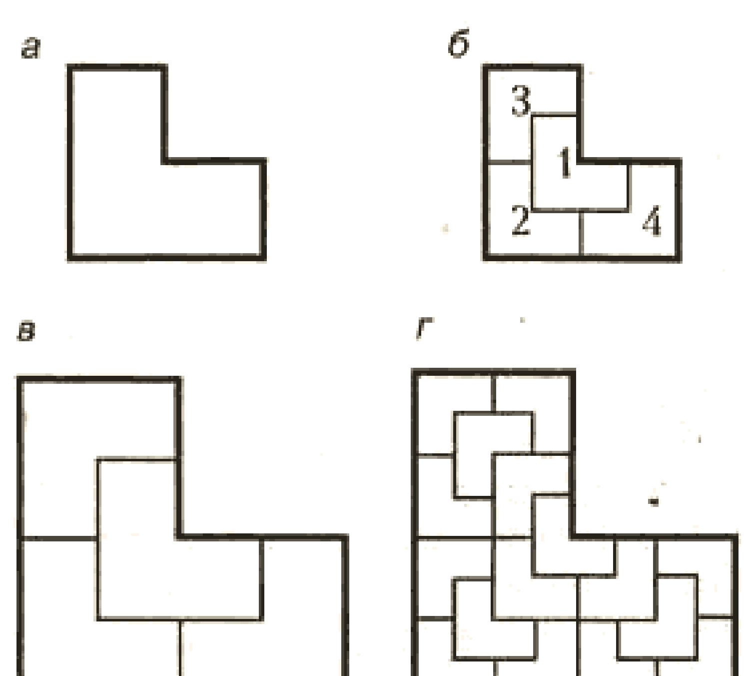

Рис. 7

разобьем его на четыре «стульчика», каждый вдвое меньшего размера (рис.7, *б*). Увеличим эту картинку вдвое так, чтобы каждый «стульчик» вырос до размеров оригинала (рис.7, *в*). Затем разрежем каждый из четырех «стульев» опять на четыре «стульчика» (рис.7, *г*) и опять получившееся увеличим вдвое. Повторяя эту процедуру опять и опять, мы получаем неограниченно расширяющуюся Г-образную область, состоящую из равных «стульев».

Эта процедура имеет странное название: «дефляция — инфляция». Знакомое всем нам слово «инфляция» соответствует этапу укрупнения плиток, а менее привычное — «дефляция» — подразбиению укрупненных на предыдущем этапе плиток на более мелкие плитки. «В пределе», как часто говорят, этот процесс (будем обозначать его как «ди-процесс») приводит к моноэдральной мозаике. Но как раз «переход к пределу» и содержит упомянутый выше каверзный момент. Собственно, о каком «пределе» здесь идет речь? Очевидно, что в результате ди-процесса мы получаем *возрастающую по размерам* последовательность кусков плоскости, уложенных плитками. Однако эта последовательность не есть последовательность фрагментов, вырастающих следующий из предыдущего по мере того, как мы добавляем к уже уложенной мозаике новые и новые плитки. Тем не менее можно доказать, что самоподобным многоугольником всегда можно замостить плоскость.

Мозаика, полученная посредством самоподобной фигуры F, называется **самоподобной**, если

- плитки этой мозаики (будем говорить, что это — плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня, причем так, что плитки 2-го уровня опять составляют мозаику (рис. 8, *а*);
- такое последовательное укрупнение возможно для любого k-го уровня (рис. 8, *б*).

В силу этого самоподобные мозаики называют также *иерархическими*, понимая под этим иерархию, которая существует между плитками предыдущего и последующего уровней. Однако иерархия может быть как «строгой», так и «слабой». При *строгой* иерархии мозаика каждого сле-