Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Рыцарь над пропастью, или Немного о законах сохранения» предназначена девятиклассникам, заметка «Конденсатор в коробке и потенциальность кулоновского поля» — десятиклассникам, «Интерференция на островах Синего Мыса» — одиннадцатиклассникам.

Рыцарь над пропастью, или Немного о законах сохранения

А.СТАСЕНКО

Жил на свете рыцарь бедный,
Молчаливый и простой,
С виду сумрачный и бледный,
Духом смелый и прямой.
А.С.Пушкин

И ВОТ ОДНАЖДЫ, надев тяжелые боевые доспехи, отправился этот Рыцарь освобождать очередной раз похищенную Принцессу. Вдруг узкая горная тропинка прервалась пропастью, над которой в самой середине висела часть «моста» на нерастяжимых нитях (рис.1). Точнее, это была платформа, до которой ни дотянуться, ни допрыгнуть, да к тому же еще и покрытая тонкой коркой скользкого льда (высокогорье!).

В крайнем огорчении схватил Рыцарь лежавший на тропе камень массой m и швырнул в мост. Горное эхо двадцать пять раз повторило звук абсолютно упругого удара, а камень низринулся в пропасть. Но — о чудо! — мост начал тихонько качаться. И тут Рыцарь сообразил, что же произошло.

При упругом ударе камня о торец тяжелой платформы и последующем отскоке горизонтальная составляющая импульса камня изменилась на $\Delta p = -2mv_x$ (рис.2). Значит, такое же приращение импульса, но противоположное по знаку, получил и мост:

$$\Delta P = 2mv_x.$$

При этом Рыцарь учел для простоты рассуждений — ведь он торопился, — что масса платформы много больше массы камня; а у кого есть время, тот может посчитать точнее, учитывая, что камень отражается от уже начавшей двигаться платформы. Итак, после первого броска платформа получила приращение скорости

$$\Delta V = \frac{\Delta P}{M}$$

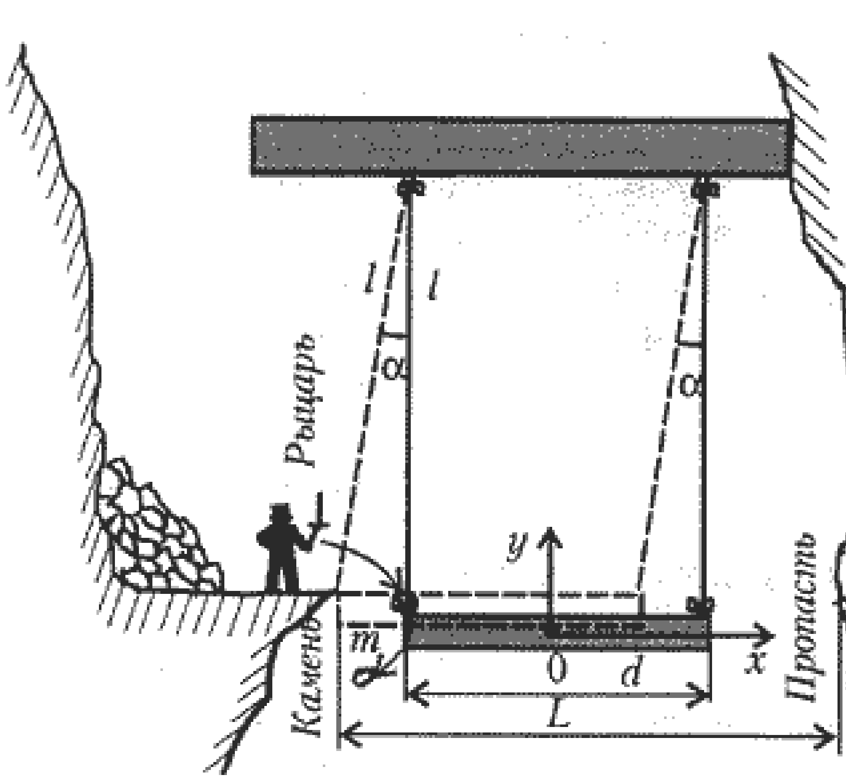

Рис. 1

и стала потихоньку качаться почти без затухания.

Рыцарь решил изобразить на пыльной тропинке этот процесс. Он нарисовал плоскую систему координат скорость — смещение (V, x). (Позднее эту плоскость назвали *фазовой.*) До первого удара платформа находилась в начале этой системы координат, в точке 0 (рис.3). В момент удара она получила приращение скорости ΔV (см. вертикальную стрелку и точку A на рисунке *а*), значит, ей была сообщена начальная кинетическая энергия. И платформа начала двигаться в сторону положительных значений x. Но поскольку тросы, на которых подвешена платформа, нерастяжимы, центр масс платформы движется по окружности и, следовательно, поднимается в поле тяготения. При этом кинетическая энергия переходит в потенциальную, так что в точке B скорость становится равной нулю при максимальном отклонении от положения равновесия. После этого платформа начинает двигаться в сторону Рыцаря, достигая в точке C максимальной скорости, и на мгновение останавливается в точке D_1. Если нет затухания, этот процесс повторяется вечно.

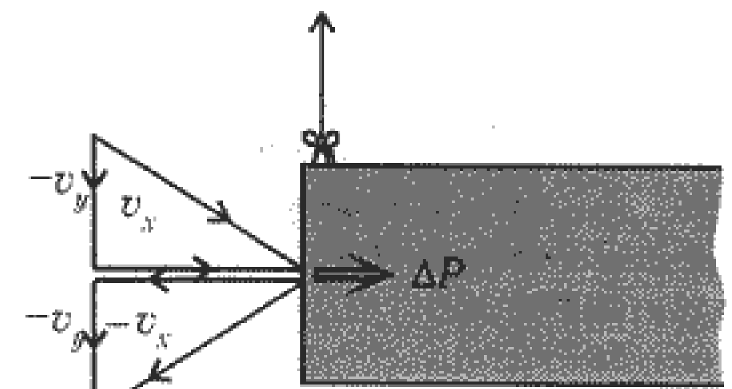

Рис. 2

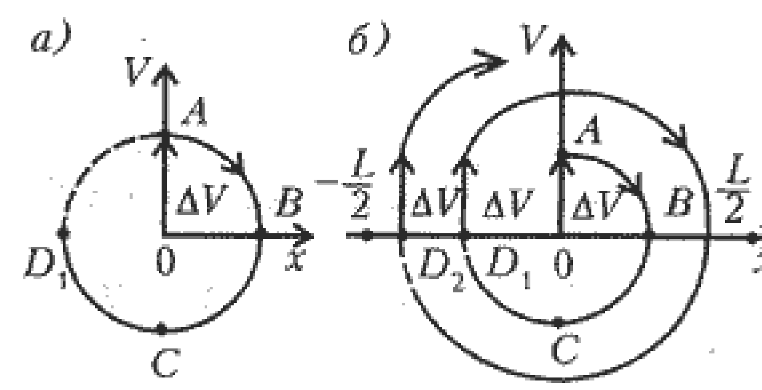

Рис. 3

Из рисунка Рыцарю стало ясно, что имеет смысл в точке D_1 бросить еще один камень. При этом, совершив еще одно качание, платформа окажется в точке D_2 (см. рисунок *б*) — и так будет продолжаться, пока точка D_N не совпадет с координатой $x = -L/2$. И Рыцарь без колебаний решил оценить, сколько бросков нужно сделать, чтобы край скользкой платформы подошел вплотную к краю пропасти и можно было бы осторожно ступить на платформу.

Он взял свой пыльный щит и написал на нем закон сохранения энергии:

$$M\frac{V_{\max}^2}{2} = Mgl\left(1-\cos\alpha_{\max}\right),$$

где $V_{\max}$ — максимальная скорость платформы (очевидно, когда она в своем качании проходит нижнюю точку), а $\alpha_{\max}$ — максимальный угол отклонения, который, как легко видеть из рисунка 1, находится из прямоугольного треугольника:

$$\cos\alpha_{\max} = \frac{L-d}{2l}.$$

При этом угле скорость платформы равна нулю: вся кинетическая энергия перешла в потенциальную. Считая, что при каждом ударе камня о платформу (когда она останавливается на мгновение в точке, ближайшей к Рыцарю) последняя получает один и тот же импульс, можно найти требуемое число ударов из условия

$$V_{\max} = N\Delta V = N\frac{\Delta P}{M} = N\frac{2mv_x}{M}.$$

Подставив все это в закон сохранения энергии, Рыцарь получил

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N\cdot 2mv_x}{M}\right)^2 = gl\left(1-\frac{L-d}{2l}\right),$$

откуда

$$N = \frac{M}{2mv_x}\sqrt{g\left(2l-L+d\right)}.$$

Теперь нужно сделать численные оценки. Подставив в формулу массу платформы $M = 10^3$ кг, массу камня $m = 1$ кг, горизонтальную составляющую скорости камня в момент удара $v_x = 10$ м/с, ширину пропасти $L = 50$ м, длину платформы $d = 30$ м, длину подвеса $l = 50$ м, он нашел число бросаний камня:

$$N = 1{,}4\cdot 10^3.$$

А сколько времени Рыцарю придется трудиться? Число колебаний платформы известно, осталось узнать их период. Он зависит, конечно, от длины маятника l (м) и от ускорения поля тяготения g $\left(\text{м/с}^2\right)$. Из этих двух величин можно составить единственную формулу, дающую нужную нам размерность периода (с):

$$\sqrt{\frac{l(\text{м})}{g\left(\text{м/с}^2\right)}} \sim T\ (\text{с}).$$

И Рыцарь вспомнил также, что еще в XV веке дедушка говорил ему: «Помни, что когда речь идет о колебаниях, то, я не знаю почему, всегда появляется 2π».

Итак, период колебаний платформы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{50\ \text{м}}{10\ \text{м/с}^2}} = 14\ \text{с}.$$

Поскольку T есть одновременно и время между ударами камней, то стало ясно, что трудиться придется не менее чем

$$t = 14\cdot 1{,}4\cdot 10^3\ \text{с} \approx 2\cdot 10^4\ \text{с} \approx 5{,}5\ \text{ч}.$$

(Хорошо еще, что можно пренебречь затуханием!) Труд не малый, но впереди — Принцесса. И Рыцарь взялся за дело.