Решения задач М1601 — М1605, Ф1613 — Ф1622

М1601. *Пусть $f(x)$ — нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых чисел a, b и c, сумма a + b + c которых равна 0, выполнено неравенство*

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

Первое решение. При перемене знаков всех трех чисел a, b и c выражение

$$F = f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a)$$

не меняется (поскольку функция f нечетна); F не меняется и при перестановке a, b, с. Поэтому можно считать, что $c\le 0$, $a\ge 0$, $b\ge 0$. Поскольку $c=-a-b$ и функция f нечетна, условие $F\le 0$ можно переписать так:

$$f(a)f(b)\le -f(c)\big(f(a)+f(b)\big)=f(a+b)f(a)+f(a+b)f(b).$$

Для монотонной функции f и неотрицательных a, b это неравенство очевидно.

Второе решение, более «симметричное». Будем считать, что $c\le 0$, $a\ge b\ge 0$, тогда $|c|=|a+b|$ и $|f(c)|\ge|f(a)+f(b)+f(c)|$, поскольку $f(b)\ge f(a)\ge 0$, $f(c)<0$. Отсюда

$$|f(c)|^2\ge f^2(a)+f^2(b)+f(c)^2+2\big(f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\big).$$

Поскольку $f^2(a)+f^2(b)$ — число неотрицательное,

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

В.Произволов, Н.Васильев

М1602. *1997 фишек расположены на плоскости в вершинах выпуклого 1997-угольника. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки — оставить на месте. Может ли случиться, что после а) 9; б) 10 ходов все фишки окажутся на одной прямой?*

Ответы: а) нет; б) да.

а) Пусть $2^n<N$. На каждой прямой лежит не более двух вершин выпуклого N-угольника (фишек). После первого хода на каждой прямой может оказаться не более четырех фишек, после второго — не более 8, после $(n-1)$-го — не более 2^n. Таким образом, собраться на одной прямой фишки могут не менее чем через n ходов. При $N = 1997 > 1024$ можно взять $n = 10$.

б) Построить пример можно так. Пусть $N\le 2^{n+1}$ (в частности, для $N = 1997$ можно взять $n = 10$). Проведем 2^n равноотстоящих параллельных прямых и расположим на них фишки в вершинах произвольного выпуклого N-угольника, как показано на рисунке 1.

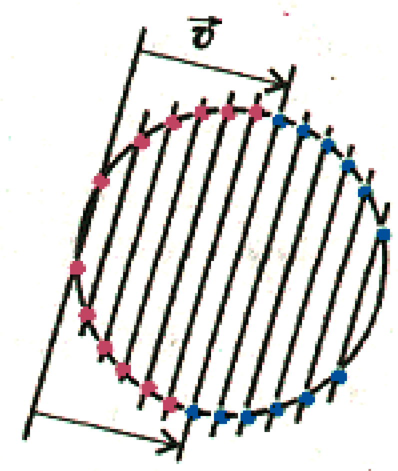


Рис.1

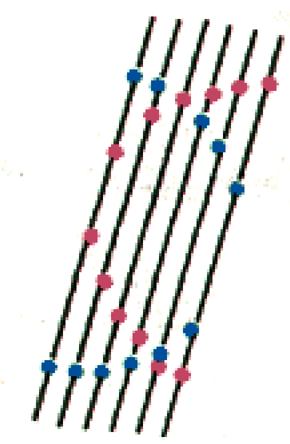


Рис.2

Сдвинув все фишки, лежащие на левой половине прямых на вектор $\vec{v}$ так, чтобы эти прямые совпали соответственно с прямыми правой половины (рис. 2), мы соберем все фишки на 2^{n-1} прямых, а через n аналогичных шагов все они соберутся на одной прямой.

М.Евдокимов

М1603. *а) Фигура М на плоскости Oxy представляет собой пересечение единичного квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ с полуплоскостью $ax+by\le c$ (a, b и c — положительные числа). Докажите, что площадь М вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{2ab}\left((c)_+^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right),$$

где $(x)_+$ означает наибольшее из чисел x и 0: $(x)_+=\max\{x,0\}$. б) Выведите аналогичную формулу для объема многогранника М в пространстве Oxyz, представляющего собой пересечение единичного куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$ с полупространством $ax+by+cz\le d$ (a, b c u d — положительные числа).

Заметим, что выражение $(c-b)_+^2$ (и аналогичные) в условии означает число, равное $(c-b)^2$, если $c-b\ge 0$, и 0, если $c-b<0$.

Покажем сначала идею решения, а потом ее оформим. У квадрата четыре угла — это очень много. Давайте рассмотрим фигуру с одними углом — положительный квадрант ($x>0$, $y>0$).

Полуплоскость $ax+by<c$ содержит все точки ниже прямой $ax+by=c$. Общая часть полуплоскости и квадранта (рис.1) — это треугольник. Прямая пересе-

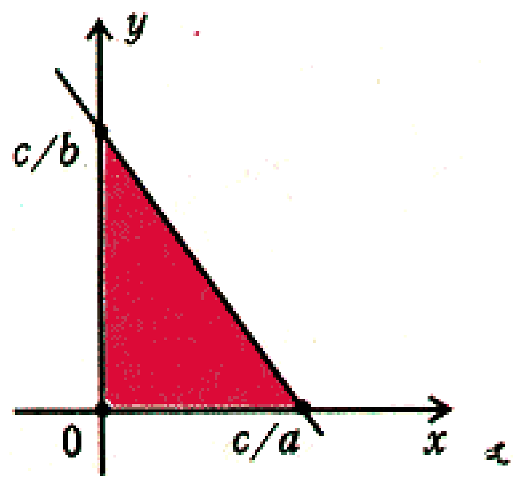


Рис.1

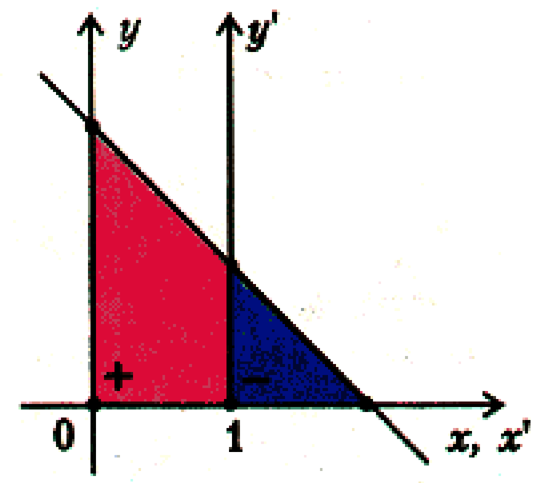


Рис.2

кает оси координат на расстояниях c/a и c/b от начала координат, поэтому площадь общего треугольника равна $c^2/2ab$.

Решив задачу для фигуры с одним прямым углом, решим ее для фигуры с двумя прямыми углами, т.е. для полосы, лежащей в положительном квадранте (рис.2). Для этого надо из треугольника, попавшего в положительный квадрант, вычесть треугольник, попавший в новый положительный квадрант с вершиной в точке $(1; 0)$. Этот новый квадрант задает новую систему координат, в которой все абсциссы точек на единицу меньше.

Уравнение прямой в новой системе координат выглядит так: $a(x'+1) + by' = c$, или $ax' + by' = c - a$. Это уравнение аналогично исходному с той разницей, что $(c - a)$ может быть отрицательным. Следовательно, если $(c - a) > 0$, то площадь треугольника в новом квадранте будет $(c-a)^2/2ab$, а если $(c - a) < 0$, то пересечения нет, и площадь считаем равной нулю. Тогда формулу для площади пересечения полуплоскости с

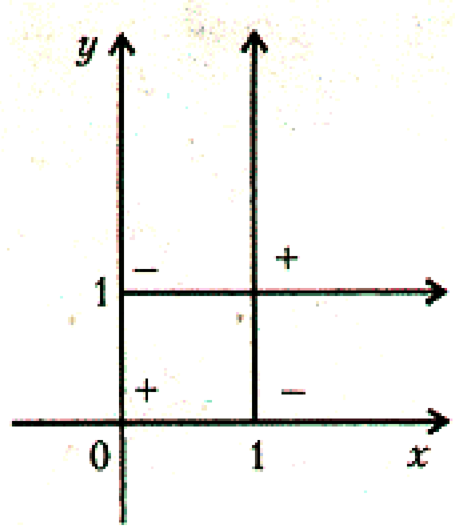


Рис.3

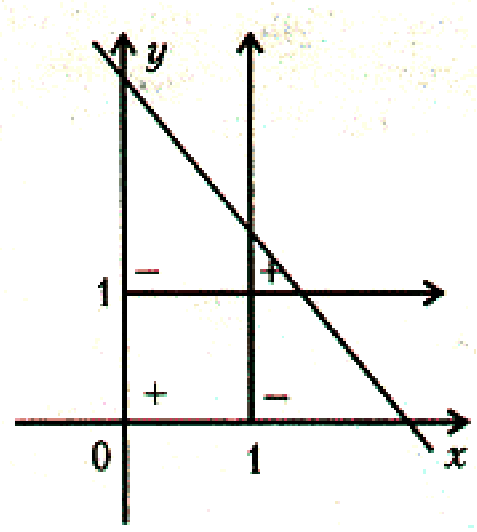


Рис.4

полосой можно записать как $c^2/2ab - (c-a)_+^2/2ab$.

Теперь легко получить выражение для квадрата с помощью четырех положительных квадрантов с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0;1)$, $(1; 0)$ и $(1; 1)$, которые отличаются параллельным переносом (рис.3). Для этого надо из квадранта с вершиной $(0; 0)$ «вычесть» квадрант с вершиной $(1; 0)$, «прибавить» квадрант с вершиной $(1; 1)$ и «вычесть» квадрант с вершиной $(0; 1)$. Обратите внимание: знаки расставлены так, что каждая точка внутри квадрата учтена один раз, а каждая точка вне квадрата — ноль раз. Выражение такого типа называется формулой включения-исключения. Аналогичная формула верна и для пересечения квадрата с полуплоскостью.

Выражая площади соответствующих треугольников (рис.4) в новых системах координат, получаем формулу включения-исключения для площади пересечения полуплоскости с квадратом:

$$\left[c^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right]/2ab.$$

В случае пересечения куба с полупространством надо сначала рассмотреть пересечение полупространства с положительным октантом и найти объем общего тетраэдра. Затем представить куб в виде «суммы» и «разности» восьми положительных октантов с вершинами в вершинах куба. Потом переписать уравнение полупространства в каждой из восьми систем координат $a(x'+p) + b(y'+q) + c(z'+r) \le d$, где $(p; q; r)$ — вектор параллельного переноса исходного октанта. И наконец, написать формулу включения-исключения для объемов тетраэдров в октантах:

$$\Big[d^3-(d-a)_+^3-(d-b)_+^3-$$
$$-(d-c)_+^3+(d-a-b)_+^3+(d-b-c)_+^3+$$
$$+(d-c-a)_+^3-(d-a-b-c)_+^3\Big]/6abc.$$

А.Канель, А.Ковальджи

М1604. *Внутри выпуклого многоугольника F расположен второй выпуклый многоугольник G. Хорда многоугольника F — отрезок, концы которого лежат на границе F, — называется опорной к многоугольнику G, если она пересекается с G только по границе: содержит либо одну вершину, либо сторону G. Докажите, что а) найдется опорная хорда, середина которой лежит на границе G; б) найдутся по крайней мере две такие хорды.*

Идею решения можно сформулировать одной фразой. Рассмотрим площади сегментов, отрезаемых от F хордами, опорными к G (рис.1), и выберем среди них наибольшую и наименьшую. Соответствующие хорды касаются G своими серединами.

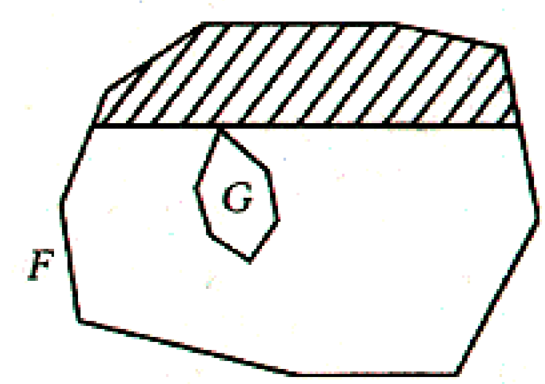


Рис.1

Изложим теперь решение более подробно. Пусть $l(\varphi)$ — опорная к G прямая, составляющая угол φ с некоторым фиксированным направлением l_0. Мы считаем, что $l(\varphi)$ — направленная прямая, G содержится в ее правой полуплоскости; $G(\varphi) = G \cap l(\varphi)$ — одна точка (вершина G) или отрезок (сторона G). Ясно, что для каждого φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, прямая $l(\varphi)$ определена однозначно. Рассмотрим площадь $S = S(\varphi)$ «сегмента», отрезаемого прямой $l(\varphi)$ от F, — пересечения F с левой полуплоскостью этой прямой. Очевидно, что $S = S(\varphi)$ — непрерывная функция от φ на отрезке $0 \le \varphi \le 2\pi$, где $S(2\pi) = S(0)$.

Пусть AB — хорда, высекаемая многоугольником F на прямой $l(\varphi)$, и K — ее середина. Докажем, что если K не лежит на границе G, то в некоторой окрестности φ функция S монотонна (возрастает или убывает). Рассмотрим близкую к $l(\varphi)$ прямую $l(\varphi+\delta)$ и соответствующую хорду A_1B_1. При достаточно малом δ прямая $l(\varphi+\delta)$ получается из $l(\varphi)$ поворотом вокруг некоторой точки $P \in G(\varphi)$, лежащей на границе G, а разность

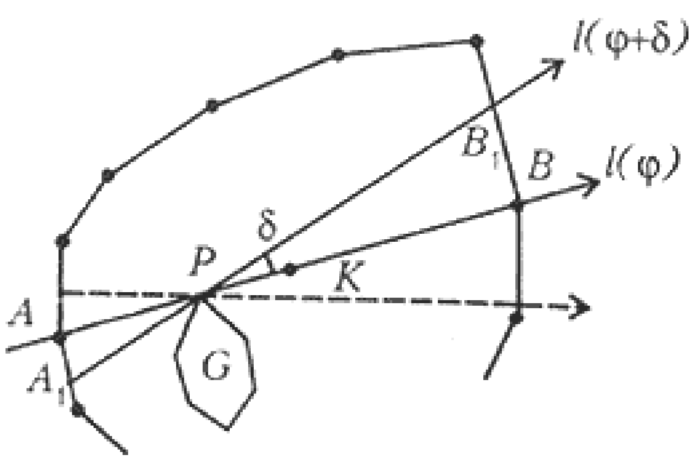


Рис.2

площадей $S(\varphi+\delta)-S(\varphi)$ равна разности площадей треугольников APA_1 и BPB_1 (рис.2). Если $PA < PB$, то (при малом δ) $PA_1 < PB_1$ и площадь треугольника APA_1 меньше площади треугольника BPB_1 (треугольник, симметричный APA_1 относительно P, лежит внутри BPB_1); таким образом, при всех достаточно малых $\delta > 0$ выполнено неравенство $S(\varphi+\delta) < S(\varphi)$. Аналогично, $S(\varphi) < S(\varphi-\varepsilon)$ при достаточно малом ε — прямая $l(\varphi-\varepsilon)$ получается поворотом $l(\varphi)$ вокруг точки $P' \in G(\varphi)$, либо совпадающей с P, либо, во всяком случае, лежащей по ту же сторону от середины K, так что $AP' < BP'$. Итак, если $G(\varphi)$ лежит по одну (на рисунке 2 — левую) сторону от K, то в окрестности φ функция S убывает. Если $G(\varphi)$ расположена по другую сторону от K, то в окрестности φ функция S возрастает.

Однако непрерывная функция $S = S(\varphi)$ (принимающая равные значения на концах отрезка $[0,\ 2\pi]$) должна достигать максимума и минимума. По доказанному выше, в этих точках середина хорды K должна лежать в $G(\varphi)$, т.е. принадлежать границе G.

Н.Васильев

М1605. *Имеются N карточек, на которых написаны различные (неизвестные) числа. Они разложены на столе по кругу числами вниз. Надо найти три какие-нибудь лежащие рядом карточки такие, что число, написанное на средней карточке, больше, чем на каждой из двух соседних. При этом разрешается перевернуть последовательно не более k карточек. Докажите, что это возможно, если а) N = 5, k = 4; б) N = 76, k = 10; в) N = 199, k = 12.*

Решим сначала задачу а). «Откроем» среди 5 чисел, расположенных по окружности, два числа $a < b$, стоящих на расстоянии 2 друг от друга, и еще одно, соседнее с большим из них — c. Из соображений симметрии, можно считать, что $c < b$. Осталось посмотреть d, стоящее между a и b: одна из троек a, d, b и d, b, c — искомая.

Хороший алгоритм отыскания нужной тройки среди n чисел, который можно придумать, рассмотрев несколько следующих значений n = 6, 7, ..., связан с последовательностью чисел Фибоначчи: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, ..., $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$. Мы докажем, что найти нужную тройку среди f_k чисел можно за k попыток. Поскольку $f_{10} = 89 > 79$, $f_{12} = 223 > 199$, это даст решения задач б) и в) даже с некоторым запасом. Для этого докажем сначала индукцией по k, что в ряду

$$\underset{f_k}{a, \ldots,} \underset{f_{k-1}}{b, \ldots,} c \qquad (*)$$

из $f_k + f_{k-1} + 1 = f_{k+1} + 1$ чисел, где известны числа a, b, c, причем b — наибольшее и находится от a и c на расстояниях f_{k-1} и f_{k-2}, можно найти нужную тройку за $k-1$ попытку. Для $k = 2$ (для ряда из четырех чисел a, b, ., c) это очевидно. Пусть вплоть до некоторого значения $k-1$ это доказано. Рассмотрим ряд ($*$) и «откроем» число d, находящееся на расстояниях f_{k-1} от a и f_{k-2} от b:

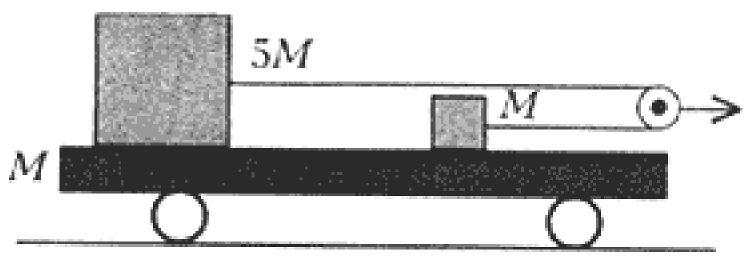
$$\underset{f_{k-1}}{a, \ldots,} \underset{f_{k-2}}{d, \ldots,} \underset{f_{k-1}}{b, \ldots,} c.$$

Если $d > b$, то мы можем применить предположение индукции к $f_k + 1$ числам $a, \ldots, d, \ldots, b$, а если $d < b$ — то к числам $d, \ldots, b, \ldots, c$: за $k-2$ попытки среди них найдется нужная тройка.

Теперь среди $f_k = f_{k-1} + f_{k-2} = 2f_{k-2} + f_{k-3}$ чисел по окружности достаточно «открыть» два числа $a < b$ на расстоянии f_{k-2} и число c, находящееся на расстояниях f_{k-2} от a и f_{k-3} от b. По соображениям симметрии, можно считать, что $b > c$. По доказанному выше, среди идущих подряд $f_{k-2} + f_{k-3} + 1 = f_{k-1} + 1$ чисел $a, \ldots, b, \ldots$ ..., c за $k-3$ попытки можно найти нужную тройку.

В.Протасов, А.Заславский

Ф1613. *На гладком горизонтальном столе находится тележка массой M, на ней два кубика массами 5 M и M, связанных легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (см. рисунок). Блок тянут постоянной силой в горизонтальном направлении, куски*



нити при этом горизонтальны. Коэффициент трения между поверхностью тележки и кубиками μ = 0,1. При какой величине силы ускорение тележки составит a = 0,2g? Какими при этом будут ускорения кубиков и блока?

В решении этой задачи нужен анализ возможности проскальзывания грузов по тележке. Вариант проскальзывания обоих грузов не подходит — ускорение тележки окажется при этом больше указанной в условии величины $0{,}2g$:

$$a_\text{т} = \frac{6Mg\mu}{M} = 6g\mu = 0{,}6g.$$

Для того чтобы оба груза не проскальзывали, нужен слишком большой коэффициент трения — не менее 0,5. Несложные рассуждения показывают, что малый груз должен по тележке проскальзывать, а большой — ехать вместе с ней.

Обозначим необходимую силу F, тогда натяжения нити, переброшенной через блок, составят $F/2$ — именно эти силы будут действовать на грузы со стороны нити. Пусть ускорение большого груза a_1, малого a_2 и тележки a. Запишем уравнения движения тел:

$$\frac{F}{2} - \mu Mg = Ma_2,$$

$$\frac{F}{2} + \mu Mg = 6Ma,$$

$$a_1 = a.$$

Решая систему уравнений, получим

$$a_2 = g\,,\ a_{бл} = \frac{(a_1 + a_2)}{2} = 0{,}6g\,, F = 2{,}3Mg\ .$$

З.Рафаилов

Ф1614. *На гладком горизонтальном столе находится тележка массой M, на которой вертикально стоит велосипедное колесо массой 3M (рис.1). Коэффициент трения между колесом и тележкой μ. К тележке прикладывают постоянную по величине горизонтальную силу, направленную параллельно плоскости колеса. При какой максимальной величине этой силы колесо сможет двигаться без проскальзывания относительно тележки? Считайте, что вся масса колеса сосредоточена на максимальном расстоянии от его центра – на внешней окружности.*

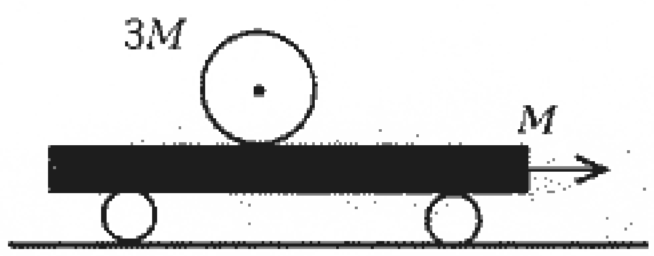


Рис.1

Колесо движется под действием силы трения f (рис.2). Ускорение его центра масс при этом составляет $a_ц = f/(3M)$. Кроме поступательного движения с этим ускорением, колесо будет закручиваться с постоянным угловым ускорением ε против часовой стрелки. Определим это угловое ускорение. Можно воспользоваться уравнением моментов сил (если знаете, что такое момент инерции и как с ним обращаться), но можно применить и закон сохранения энергии. Для этого достаточно знать, что энергия обруча складывается из энергии, связанной с поступательным движением центра масс, и энергии, связанной с вращением вокруг центра масс (центра «обруча»). Первое слагаемое равно $3Mv^2/2$, второе составляет $3M\omega^2R^2/2$ – все точки обода колеса имеют одинаковые по величине ($v = \omega R$) скорости относительно центра. Работа силы f за время τ равна приращению энергии обруча:

Рис.2

$$f\left(\frac{a_ц\tau^2}{2} + \frac{\varepsilon R\tau^2}{2}\right) = \frac{3Ma_ц^2\tau^2}{2} + \frac{3M\varepsilon^2R^2\tau^2}{2},$$

откуда (подставив значение $a_ц$) получим

$$\varepsilon R = \frac{f}{3M} = a_ц\,.$$

Условие отсутствия проскальзывания обруча относительно тележки можно записать в виде

$$a_т = a_ц + \varepsilon R\,,\ \text{или}\ \frac{F-f}{M} = \frac{2f}{3M}\,.$$

Отсюда находим искомое значение силы F:

$$F = \frac{5f}{3} \le \frac{5}{3}\cdot 3\mu Mg,\ \text{или}\ F_{max} = 5\mu Mg\,.$$

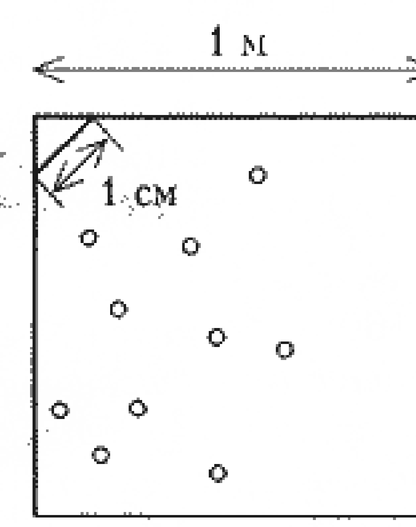
Р.Александров

Ф1615. *В невесомости проводится следующий опыт. Заполненный воздухом большой сосуд содержит множество мельчайших масляных капелек и одну каплю довольно больших размеров. При столкновении маленьких капель между собой они упруго разлетаются, а при столкновении с большой каплей происходит их поглощение. За 1 час диаметр большой капли увеличился в 2 раза. Через какое время он увеличится еще в 2 раза? Большая капля не касается стенок сосуда. Испарения с ее поверхности не происходит.*

Будем считать, что капель в сосуде очень много и что сосуд огромный, так что концентрация капель по мере роста большой капли не меняется. Тогда при хаотическом (броуновском) движении маленьких капель количество прилипающих на данную площадь за небольшой интервал времени капелек все время одинаково. Это означает, что толщина нарастающего за каждый интервал времени слоя жидкости остается неизменной – радиус большой капли линейно растет со временем. Значит, для увеличения ее радиуса от $2R$ до $4R$ понадобится ровно вдвое больше времени, чем для увеличения от R до $2R$, т.е. еще два часа.

З.Каплин

Ф1616. *На компьютере сделана модель бильярда (см. рисунок): на квадратном гладком горизонтальном столе размером 1×1 м могут двигаться одинаковые шайбы диаметром 1 мм каждая, общее число шайб 10000, вначале компьютер располагает шайбы случайным образом. Один из углов квадрата срезан под углом 45°, образуя лузу длиной 1 см. Шайба, попавшая в лузу, вылетает со стола. В начальный момент одна из шайб имеет случайно направленную скорость, равную 1 м/с, остальные шайбы неподвижны. Все удары запрограммированы как абсолютно упругие (удары шайб друг о друга не лобовые!). Через какое время со стола вылетит первая тысяча шайб? Оцените также время, за которое в большинстве экспериментов через лузу вылетят все шайбы.*



Через некоторое время после начала процесса движение шайб «хаотизируется», средняя энергия шайбы составит $Mv_0^2/(2N)$ и это даст возможность найти среднюю квадратичную скорость шайбы:

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{N}} = 0{,}01\ \text{м/с}\,.$$

Оценив обычным образом длину свободного пробега шайбы, получим среднее время между ударами:

$$\lambda = \frac{a^2}{N\cdot 2d} = 0{,}05\ \text{м},\ \tau = \frac{\lambda}{v} = 5\ \text{с}\,.$$

Отсюда видно, что время «хаотизации» составляет десятки секунд (в начале процесса удары происходят чаще и основной вклад в «разравнивание» скоростей дают удары после того, как скорости шайб уже существенно меньше v_0). Далее будет видно, что этим временем можно пренебречь – оно составляет небольшую часть искомых интервалов.

Число вылетающих шайб можно считать обычным способом — как при расчете давления молекул на стенку. Нужно только учесть, что движение «двумерное» и оценка скорости вдоль некоторой оси должна содержать не «корень из трех», а «корень из двух» — квадрат полной скорости складывается из суммы квадратов двух составляющих скорости. Для оценки времени τ_1 вылета первой тысячи шайб будем считать «концентрацию» шайб неизменной:

$$\frac{0{,}5l\left(v/\sqrt{2}\right)\tau_1 N}{a^2} = \frac{N}{10}, \ \tau_1 \approx 3\cdot 10^3 \text{ с}.$$

Для оценки времени вылета остальных шайб заметим, что при уменьшении концентрации уменьшается во столько же раз и число ударов (скорости шайб внутри будем считать не изменяющимися — это не совсем точно, так как у быстрых шайб вероятность вылететь за данный интервал времени побольше, но для оценки мы это учитывать не будем), тогда за следующие 3000 секунд вылетит $1/10$ оставшихся шайб, за следующие 3000 секунд — еще $1/10$ и т.д. Это означает, что число шайб, оставшихся после n таких интервалов, будет $(0{,}9)^n N$ и можно найти такое число интервалов, после которого останется, скажем, только одна шайба:

$$\lg N + n \lg 0{,}9 = 0, \ n = -\frac{4}{\lg 0{,}9} \approx 100.$$

Тогда

$$\tau_2 = n\tau_1 \approx 3\cdot 10^5 \text{ с}.$$

Посмотрим, большой ли вклад дают последние шайбы. Вероятность вылета при одном ударе можно оценить как отношение длины лузы к суммарной длине всех стенок — получается $1/400$. Время между ударами около 20 секунд, время вылета оказывается порядка нескольких тысяч секунд, что не изменяет заметно времени τ_2.

А.Зильберман

Ф1617. *В вертикальном теплоизолированном сосуде под массивным подвижным поршнем находится порция идеального одноатомного газа при температуре T_0, поршень при этом находится в равновесии. Температуру газа в сосуде при помощи миниатюрного нагревателя очень быстро увеличивают в 2 раза и оставляют систему в покое. Какая температура установится в сосуде после того, как поршень перестанет двигаться? Трение поршня о стенки пренебрежимо мало. Поршень и стенки практически не получают тепла от газа. Воздуха снаружи нет.*

Газ совершает работу по подъему поршня за счет своей внутренней энергии. Будем считать, что нагрев произошел настолько быстро, что поршень не успел за это время сместиться и набрать заметную скорость. Внутренняя энергия газа после нагрева составляет

$$U_1 = 1{,}5\nu R\cdot 2T_0.$$

Пусть поршень в конце концов поднялся на высоту h над начальным положением H. Обозначив конечную температуру T_1, запишем условие равновесия до нагрева и после установления равновесия:

$$\frac{Mg}{S}SH = \nu RT_0, \ \frac{Mg}{S}S(H+h) = \nu RT_1,$$

где M — масса и S — площадь поршня. Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$Mgh = 1{,}5\nu R\cdot 2T_0 - 1{,}5\nu RT_1.$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$h = 0{,}6H, \ T_1 = T_0\frac{H+h}{H} = 1{,}6T_0.$$

М.Учителев

Ф1618. *Теплопроводность дерева вдоль волокон в 2 раза больше, чем поперек. Два длинных тонких цилиндра одинаковых размеров сделаны из такого дерева; ось одного из них направлена вдоль волокон, ось другого составляет с направлением волокон угол 30°. Боковые поверхности цилиндров теплоизолируют и создают одинаковые разности температур между торцами цилиндров. Во сколько раз отличаются тепловые потоки в этих цилиндрах?*

Тепловой поток (Q) через цилиндр пропорционален разности температур ($T_2 - T_1$), приходящейся на единицу длины (L) вдоль направления распространения тепла, и площади (S) поперечного сечения. Обозначив коэффициент пропорциональности K (коэффициент теплопроводности), получим тепловой поток для первого случая:

$$Q_1 = \frac{KS(T_2 - T_1)}{L}.$$

Во втором случае все сложнее. Будем считать, что полный тепловой поток складывается из потоков тепла, которые распространяются вдоль волокон (под углом α к оси цилиндра) и перпендикулярно этим волокнам. Мы могли бы выбрать направления и иначе, но именно вдоль этих направлений мы знаем коэффициенты теплопроводности. Для потока вдоль волокон перепад температур на единицу длины получается меньше, чем в первом случае, — он равен $\left((T_2 - T_1)\cos\alpha\right)/L$. Учтем и изменение «поперечной» площади — для этого направления получится $S\cos\alpha$. Для потока тепла в поперечном направлении все аналогично, но вместо угла α надо взять ($90° - \alpha$) и считать коэффициент теплопроводности вдвое меньшим. Тогда полный поток тепла во втором случае будет

$$Q_2 = \frac{KS\cos^2\alpha\cdot(T_2 - T_1)}{L} + \frac{0{,}5KS\sin^2\alpha\cdot(T_2 - T_1)}{L}.$$

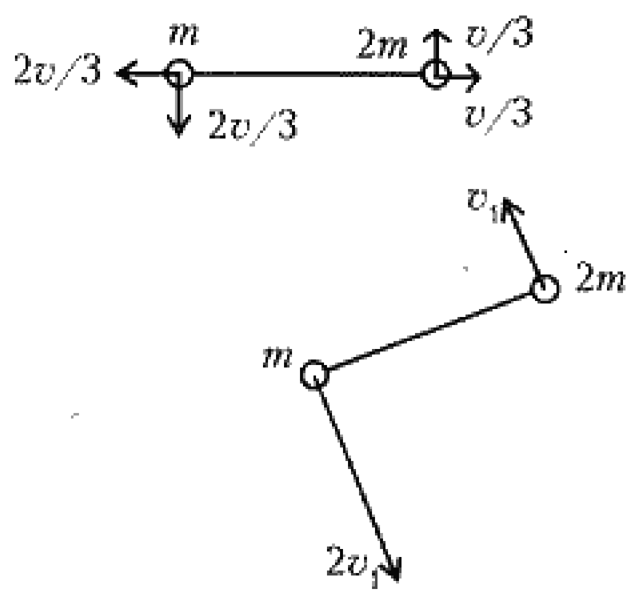
Отношение тепловых потоков составит

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{0{,}75 + 0{,}5\cdot 0{,}25} = \frac{8}{7} \approx 1{,}14.$$

С.Варламов

Ф1619. *Вдали от всех других тел в космосе двигаются два маленьких заряженных шарика, масса одного из них 1 г, другого 2 г. Заряды шариков равны по величине и противоположны по знаку. В данный момент расстояние между шариками 1 м, скорость более тяжелого шарика равна 1 м/с и направлена вдоль прямой, соединяющей центры шариков, по направлению* *от легкого шарика, скорость легкого шарика такая же по величине, но перпендикулярная указанной прямой. При какой величине зарядов шарики при дальнейшем движении побывают дважды на расстоянии 3 м друг от друга? Гравитационным взаимодействием шариков пренебречь.*

Заряды шариков не должны быть слишком велики — иначе шарики просто не разлетятся на расстояние $3a$ (где $a = 1$ м), заряды не должны быть и слишком малы — иначе шарики вообще разлетелись бы «на бесконечность» и не вернулись друг к другу. Итак, для того чтобы шарики побывали на указанном расстоянии дважды (а в этом случае — и многократно), их заряды должны лежать в определенном интервале. Найдем его «верхнюю» границу — соответствующую случаю, когда максимальное расстояние между шариками составит $3a$. Для этого воспользуемся законом сохранения энергии — кинетическая энергия шариков уменьшается при разлете и на такую же величину возрастает энергия электростатического взаимодействия зарядов. Однако не вся кинетическая энергия системы перейдет в электрическую — центр масс продолжает двигаться с неизменной скоростью, а шарики кроме «разлета» могут вращаться вокруг центра масс.



Перейдем в систему, связанную с центром масс шариков. Ее скорость удобно представить как сумму двух составляющих — вдоль линии шариков (начальный момент!) с величиной $2v/3$ и перпендикулярно ей с величиной $v/3$.

На рисунке показаны скорости шариков в системе центра масс сразу после начала движения и на максимальном удалении $3a$ (масштаб на рисунке не соблюдается — второй отрезок должен быть в 3 раза длиннее). Во втором случае шарики уже не разлетаются и их скорости перпендикулярны соединяющей их линии. Легко видеть, что скорость v_1 тяжелого шарика во столько раз меньше скорости $v/3$, во сколько раз расстояние до центра масс для этого шарика больше начального, т.е. $v_1 = v/9$. Для легкого шарика эта скорость в два раза больше.

Запишем баланс энергий:

$$m\frac{4v^2}{9} + 2m\frac{v^2}{9} - m\frac{2v^2}{81} - 2m\frac{v^2}{2\cdot 81} = \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3a}\right).$$

Отсюда получаем

$$q_1 = v\sqrt{\frac{68\pi\varepsilon_0 ma}{18}} \approx 0{,}32 \text{ мкКл}.$$

Аналогично — для величины q_2, гарантирующей шарики от разлета на бесконечное расстояние. Но теперь можно не учитывать в энергии «вращательную» составляющую — при большом расстоянии между шариками она становится пренебрежимо малой, поэтому запишем

$$m\frac{4v^2}{9} + 2m\frac{v^2}{9} = \frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 a}, \text{ и } q_2 = v\sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 ma}{3}} \approx 0{,}27 \text{ мкКл}.$$

Итак, при $q_1 \ge q \ge q_2$ шарики побывают дважды (и еще много раз) на расстоянии 3 м друг от друга.

З.Рафаилов

Ф1620. *Цепь на рисунке 1 содержит огромное количество звеньев, каждое из которых состоит из резистора и двух вольтметров. Все вольтметры в цепи одинаковые, сопротивления всех резисторов равны между собой. Цепь подключают к батарейке, при этом первые два вольтметра показывают напряжения 6 В и 4 В (догадайтесь сами — какой показывает меньше, а какой больше). Найдите показания второй пары вольтметров. Найдите также сумму показаний всех вольтметров.*

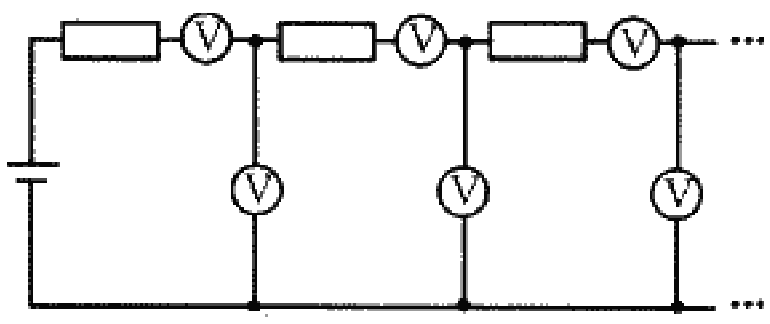


Рис.1

Обозначим сопротивление всей бесконечной цепочки X. Сопротивление такой цепочки не должно измениться при добавлении или отбрасывании одного звена (резистор и два вольтметра). Следовательно, параллельно второму вольтметру включен резистор X (рис.2), и мы можем записать соотношения для упростившейся схемы (вспомним показания вольтметров!):

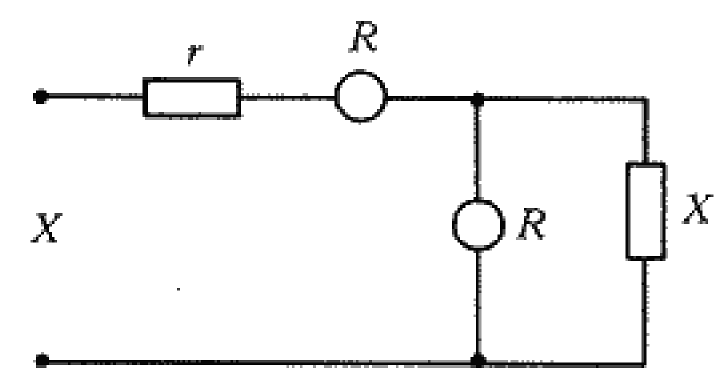


Рис.2

$$\frac{RX}{R+X} = \frac{4R}{6}.$$

Отсюда $X = 2R$. Теперь легко найти величину r:

$$r + R + \frac{2R}{3} = X = 2R,\ r = \frac{R}{3}.$$

Для первого звена напряжение на резисторе r получается 2 В, а напряжение батарейки составляет 12 В. Второе звено цепи (и бесконечная цепочка начиная со второго звена) подключено к напряжению 4 В, показания вольтметров этого звена в 3 раза меньше, чем первого звена, и т. д. Тогда понятно, что показания вольтметров второго звена составят 2 В и 4/3 В. Легко найти и сумму показаний вольтметров в этой цепи — первое звено дает 10 В, второе в 3 раза меньше и т.д. Пользуясь формулой для нахождения суммы бесконечной геометрической прогрессии, получим $S = 10/(1-1/3)$ В = 15 В.

Р.Александров

Ф1621. *Катушка индуктивности состоит из нескольких одинаковых витков очень тонкого провода, намотанных вплотную друг к другу. На оси катушки на некотором расстоянии от нее расположили еще один такой же замкнутый виток так, что ось витка совпадает с осью катушки. Катушку подключили к выходу источника переменного тока, при этом амплитуда тока отдельно расположенного витка оказалась в $k = 3$ раза меньше амплитуды тока катушки. Во сколько раз отличаются величины индуктивности катушки, измеренные без дополнительного витка и вместе с ним? Сопротивление провода, из которого сделаны витки, пренебрежимо мало. Считайте, что индуктивность катушки без дополнительного витка в 30 раз больше индуктивности одного витка.*

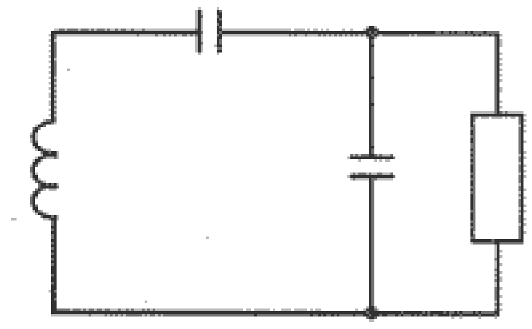
Обозначим число витков катушки N, тогда при токе I она создаст около одиночного витка поле B, пропорциональное этому току и числу витков катушки: $B = \alpha NI$. Поток, который пронизывает при этом одиночный виток площадью S, равен $\Phi_{21} = \alpha NIS$. Из условия задачи следует, что этот поток в k раз меньше «своего» потока — создаваемого при токе I в каждом из витков самой катушки. Если индуктивность одного витка L_0, то можно записать: $\alpha NIS = L_0 I/k$. Поле одиночного витка с током I/k создает магнитный поток через все витки катушки, равный $\Phi_{12} = \alpha(I/k)SN$. Этот поток вычитается из собственного потока катушки (правило Ленца) и уменьшает измеренную величину индуктивности катушки. Отсюда

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_1 I}{L_1 I - L_0 I/k^2} =$$

$$= \frac{1}{1 - L_0/\left(L_1 k^2\right)} = \frac{1}{1 - 1/\left(30k^2\right)} \approx \frac{270}{269} \approx 1{,}004.$$

А.Зильберман

Ф1622. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных между собой последовательно. Катушка и конденсаторы практически идеальные, но из-за наличия малого сопротивления соединяющих проводов $r = 0{,}1$ Ом колебания медленно затухают: за $n_1 = 10$ периодов колебаний амплитуда тока через катушку уменьшается на $\alpha = 1\%$. Параллельно одному из конденсаторов подключают резистор (см. рисунок), и теперь амплитуда колебаний уменьшается на тот же 1% за $n_2 = 2$ полных периода колебаний. Найдите сопротивление этого резистора.*



Рассмотрим вначале случай, когда подключение резистора изменяет частоту контура незначительно, т.е. когда подключен большой резистор. В этом случае в нем за период должно рассеиваться тепла в 4 раза больше, чем в последовательном резисторе сопротивлением r (общая мощность потерь возросла в 5 раз). Затухание и в этом случае можно считать малым, поэтому действующее (эффективное) значение силы тока (и напряжения) будем брать как для синусоидального. Тогда для случая только последовательного резистора (с учетом того, что 1% по амплитуде это 2% по энергии) получим

$$r\left(I_0^2/2\right)\cdot 10T = \frac{0{,}02 L I_0^2}{2}.$$

Период для нашего контура $T = 2\pi\sqrt{LC/2}$. Для параллельного резистора (напряжение на нем — половина напряжения на катушке) запишем

$$\frac{\left(U_0/2\right)^2}{2R_1} = \frac{4rI_0^2}{2};$$

в нашем контуре с последовательно соединенными конденсаторами —

$$\frac{CU_0^2}{4} = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Окончательно получим

$$R_1 = \frac{10^6\pi^2 r}{16} \approx 6\cdot 10^4\ \text{Ом}.$$

Есть и другая возможность удовлетворить формально условию задачи — взять маленький резистор, «закоротив» один из конденсаторов и увеличив этим период колебаний в контуре. При этом

$$r\left(I_0^2/2\right)\cdot 10T = \left(r + R_2\right)\left(I_0^2/2\right)\cdot 2\cdot 1{,}41T,$$

$$R_2 = 2{,}5r = 0{,}25\ \text{Ом}.$$

А.Контуров

УСРЕДНЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

Одиннадцатиклассники на Московской олимпиаде (точнее, на отборочном туре на российскую олимпиаду) решали такую задачу:

М1596. *Про непрерывную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[0; 5]$, известно, что $\int_0^5 f(x)\,dx = 0$. Докажите, что на этом отрезке найдутся такие числа a и b, что $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ и при этом $b - a = 2$ или 3.*

Решение основано на двух идеях:

• среднее значение функции заключено между максимальным и минимальным значениями (нематематики формулируют это так: «если тебе слишком хорошо, то кому-то плохо»);

• всякая определенная на отрезке непрерывная функция, среди значений которой есть и положительное,