Конкурс «Математика 6–8»

Этой публикацией заканчивается очередной конкурс «Математика 6–8» для учащихся 6–8 классов. Итоги этого конкурса будут подведены в пятом номере журнала. Победители — математические кружки и отдельные школьники — будут награждены призами журнала, а лучшие кружки будут, кроме того, приглашены в конце августа в летний математический лагерь. Следующий конкурс «Математика 6–8» начнется в четвертом номере журнала.

Решения задач из этого номера высылайте не позже 15 мая 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»).

16. Во время поездки к морю Петя собрал на берегу несколько красивых камней. Однажды он разложил их в 6 коробок так, чтобы количества камней в коробках были попарно взаимно простыми. Потом он взял по одному камню из двух коробок и отложил их в отдельную кучку, дальше он снова взял по одному камню из двух коробок и положил в ту же кучку. Когда он в девятый раз проделал эту процедуру, во всех коробках осталось поровну камней.

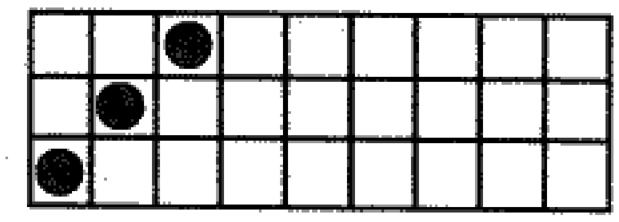
Сколько у Пети было камней и как они были разложены по коробкам?

И.Акулич

17. На окружности расположены 100 точек, являющихся вершинами правильного 100-угольника. Десять из этих точек окрасили в красный цвет, а еще десять — в синий. Докажите, что среди хорд, соединяющих точки красного цвета, найдется хорда, равная по длине одной из хорд, соединяющих точки синего цвета.

В.Произволов

18. На доске 3×9 стоят три шашки так, как показано на рисунке. Двое начинают играть в следующую игру:



каждый по очереди передвигает одну из шашек вправо по горизонтали. Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода, т.е. при его ходе все шашки будут стоять у правого края. Докажите, что при правильной игре выигрывает начинающий.

Д.Изаак

19. Найдите какие-нибудь два десятизначных числа, наименьшее общее кратное которых равно квадрату их разности.

С.Токарев

20. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$, а угол AOD равен полусумме углов BAD и CDA. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

С.Токарев

Заключительный этап конкурса «Математика 6–8»

В «Кванте» №5 за 1997 год были подведены итоги заочного конкурса « Математика 6–8». 14 математических кружков, победивших в этом конкурсе, были приглашены на заключительный этап конкурса. Однако в силу разных организационных причин место и время проведения этого этапа дважды переносились, поэтому принять участие в заключительном туре смогли лишь 6 команд: из Астрахани, Иванова, Омска, Самары, Харькова и Ярославля.

К ним присоединились еще две команды: команда Рыбинска — хозяева — и команда Долгопрудного — хозяева следующего соревнования по очередному конкурсу «Математика 6–8».

Как следует из уже сказанного, очные соревнования проходили в Рыбинске. Место было выбрано очень удачно — в сосновом бору на берегу Рыбинского водохранилища. За день до заезда команд прекратились дожди, и все семь дней была чудесная погода.

Турнир прошел чрезвычайно успешно, чему во многом способствовала большая и напряженная работа оргкомитета. От имени журнала приносим благодарность Н.А.Брянкиной — зам. начальника Управления по делам образования и молодежи Рыбинска, И.Е.Васильевой — директору Центра дистанционного обучения школьников при Департаменте образования Ярославской области и доцентам ЯрГУ С.Г.Волченкову и А.Н.Морозову.

Традиционно (а это соревнование проводилось уже третий год) вначале была математическая олимпиада, в которой каждый из школьников выступал самостоятельно. Здесь проводилось лишь личное первенство. Приводим список призеров олимпиады.

ДИПЛОМЫ I СТЕПЕНИ ПОЛУЧИЛИ

Гайфуллин Александр (Жуковский, с.ш.10),
Карвонен Максим (Рыбинск, гимназия-лицей 2),
Подаксенов Василий (Омск, гимназия-лицей 2).

ДИПЛОМЫ II СТЕПЕНИ ПОЛУЧИЛИ

Берштейн Михаил (Харьков, ФМЛ 27),
Боровиков Кирилл (Ярославль, с.ш.69),
Бурцев Александр (Омск, ФМШ 64),
Волынин Денис (Рыбинск, с.ш. 30),
Мойкина Татьяна (Ярославль, гимназия 1),
Соколов Сергей (Рыбинск, с.ш.30),
Шмаков Сергей (Омск, ФМШ 64).

ДИПЛОМЫ III СТЕПЕНИ ПОЛУЧИЛИ

Бакшин Алексей (Иваново, с.ш. 30),
Жежерун Андрей (Самара, университет Наяновой),
Касьянов Дмитрий (Долгопрудный, с.ш. 5),
Ляшенко Егор (Омск, ФМШ 64),
Моисеев Игорь (Иваново, школа-лицей «Гармония»),
Овчинников Андрей (Самара, университет Наяновой),
Полякова Людмила (Харьков, ФМЛ 27),
Сербин Дмитрий (Омск, ФМШ 64),
Скрицкий Герман (Самара, университет Наяновой),
Ульянов Федор (Иваново, школа-лицей 33).

Остальные дни соревнований были заняты математическими боями между командами городов. Правда, здесь были некоторые вариации. Команда Харькова приехала в неполном составе, поэтому ее дополнили двумя школьниками из Иванова, команда которого была больше стандартного состава в 6 человек. Объединенная команда получила название ХарьkИв, что соответствует украинскому названию Харькова — Харькiв. В команду Долгопрудного был включен школьник из Жуковского Московской области, победитель заочного конкурса в личном зачете Саша Гайфуллин.

Общий уровень участников оказался очень высоким, в чем несомненная заслуга их наставников, таких как Г.П.Кукин, Н.И.Храмова, А.С.Штерн, В.А.Бормотова, В.Л.Дольников, А.Н.Морозов и др.

Победителями турнира математических боев оказались сразу две команды: Омска и Рыбинска. Финальный бой между этими командами закончился со счетом 48:48, т.е. обе команды решили все предложенные им задачи. С точно таким же результатом закончилась и их встреча в предварительном матбою отборочного турнира. «Бронзу» разделили Иваново и ХарькИв. Не повезло сильной команде Самары, которую жребий поставил в одну группу с обоими победителями — командами Омска и Рыбинска — и тем самым лишил возможности попасть в полуфинал.

Уже стало традиционным, что задачи на соревнованиях этого конкурса глубоки по содержанию и интересны. В этом заслуга жюри, возглавлявшегося доцентом МФТИ А.П.Савиным. Предлагаем читателям несколько задач этих соревнований. Задачи 1—7 были включены в задание олимпиады, а задачи 8—14 — в задания математических боев.

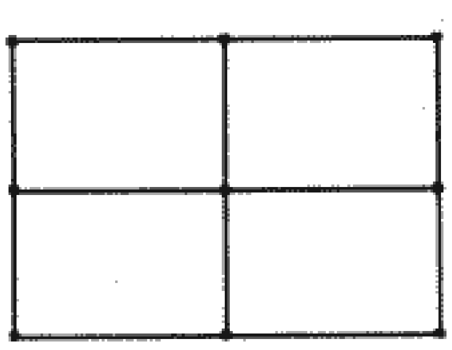
1. На доске в ряд выписаны сто семерок. Можно ли между некоторыми из них поставить знаки «+» или «−» так, чтобы значение полученного выражения равнялось 1997?

2. Можно ли все натуральные числа от 1 до 9 записать в клетки таблицы 3×3 так, чтобы сумма чисел в любых двух соседних (по вертикали или горизонтали) клетках была простым числом?

3. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на четыре четырехугольника, каждый из которых является параллелограммом или трапецией.

4. На первой встрече делегаций Земли и Марса выяснилось, что ноги у марсианина в точности такие же, как и у человека, а вот количества рук и пальцев на руках другие. Хотя марсиан было на шесть больше, чем землян, общее число пальцев (на руках и на ногах) у марсиан оказалось на один меньше. Сколько всего участников было на встрече?

5. Нарисуйте замкнутую ломаную без самопересечений с наименьшим возможным числом звеньев, пересекающую каждый из 12 отрезков (см. рисунок) и не проходящую через их концы.



6. Три гонщика ездят по велотреку в одном направлении с разными постоянными скоростями. Известно, что для любых двух гонщиков на велотреке имеется ровно k точек, в которых один обгоняет другого. Докажите, что число k нечетно.

7. Имеется $n\geq2$ кошельков, по 20 монет в каждом. Все монеты по виду одинаковы, однако в одном из кошельков они фальшивые, весящие на 1 г меньше настоящих, и еще в одном — фальшивые, весящие на 1 г больше настоящих. При каких n за одно взвешивание на двухчашечных весах со стрелкой можно определить, в каких кошельках какие монеты?

8. 10 монет, среди которых есть как настоящие, весящие по 10 г, так и фальшивые, весящие по 9 г, выложены в ряд. Известно, что каждая настоящая монета лежит левее любой фальшивой монеты. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все настоящие монеты?

9. Придумайте три треугольника, из которых можно (без наложений) составить и треугольник, и выпуклый четырехугольник, и выпуклый пятиугольник. (При составлении каждой из этих фигур должны использоваться все три треугольника.)

10. Последовательность чисел определена следующим образом: $a_1 = 19$, $a_2 = 97$, $a_{n+2} = (a_{n+1}+1)/a_n$ для любого натурального n. Найдите a_{1997}.

11. Точку пересечения графиков функций $y = ax + b$ и $y = bx + a$, где $a \neq b$, отметили красным цветом, а точки пересечения каждого из них с осью ординат — синим. После этого систему координат и сами графики стерли, оставив только три отмеченные точки (числа a и b также неизвестны). Восстановите оси координат.

12. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, а на отрезках C_1B, A_1C и B_1A — соответственно точки C_2, A_2 и B_2 так, что отрезки C_1A_2, A_1B_2 и B_1C_2 имеют общую точку и параллельны сторонам треугольника ABC. Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

13. На доске записали 16 трехзначных чисел, дающих все различные остатки при делении на 16. Какое наименьшее количество различных цифр могло быть использовано?

14. В квадрате площадью 100 закрашен квадратик площадью 1, стороны которого параллельны сторонам большого квадрата. За одну пробу про любой многоугольник можно узнать, какая доля его площади закрашена. Можно ли за две пробы наверняка определить местоположение закрашенного квадратика?

Авторы задач: Р.Женодаров (1, 11), С.Волченков (2, 5, 7), В.Произволов (3, 12), И.Акулич (4), С.Токарев (6, 8, 14), О.Крижановский (9), А.Савин (10), С.Конягин (13).

Публикацию подготовили
А.Савин, С.Токарев