Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1621» или «Ф1628». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1625 — М1630 предлагались на XXXVIII Международной математической олимпиаде. Задачи Ф1628 — Ф1637 предлагались на Соровской олимпиаде по физике 1997/98 учебного года.

Задачи М1621 — М1630, Ф1628 — Ф1637

М1621. а) В треугольнике заданы две стороны b и c. Какой должна быть третья сторона a, чтобы точки касания ее со вписанной и вневписанной (касающейся третьей стороны и продолжений сторон b и c) окружностями делили сторону a на три равные части?
б) Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий условиям пункта а)?

М1622. Пусть K — множество натуральных чисел, представимых в виде суммы различных чисел вида $2^m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots$) : $K = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок натурального ряда от 1 до N. Каких чисел на этом отрезке больше — принадлежащих множеству K или остальных, если а) $N = 1000$; б) N — произвольное натуральное число?

Б.Кукушкин

М1623. Один из углов треугольника равен 60°. Обозначим через H точку пересечения высот, через O и I — центры описанной и вписанной окружностей этого треугольника.
а) Докажите, что $OI = IH$.
б)* Следует ли из последнего равенства, что один из углов треугольника равен 60°?

А.Савин

М1624. Внутри вписанного в окружность выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась отличная от центра окружности точка P, из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков A_1P, $A_2P, \ldots, A_nP$ быть рациональными числами? Разберите случаи:
а) $n = 4$; б) $n = 8$; в)* $n = 6$;
г) $n = 5$ и $n = 7$; д)* $n > 8$.

М.Панов

М1625. Плоскость разбита на единичные квадраты, вершины которых находятся в точках с целочисленными координатами. Квадраты раскрашены поочередно в черный и белый цвета (т.е. в шахматном порядке). Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматривается прямоугольный треугольник с вершинами в целочисленных точках, катеты которого имеют длины m и n и проходят по сторонам квадратов. Пусть S_1 — площадь черной части треугольника, а S_2 — площадь его белой части. Положим

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Вычислите $f(m, n)$ для всех натуральных чисел m и n, которые либо оба четны, либо оба нечетны.
б) Докажите, что $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ для всех m и n.
в) Покажите, что не существует константы C такой, что $f(m, n) < C$ для всех m и n.

(Белоруссия)

М1626. В треугольнике ABC угол A является наименьшим. Точки B и C делят окружность, описанную около этого треугольника, на две дуги. Пусть U — внутренняя точка той дуги с концами B и C, которая не содержит точку A. Срединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают прямую AU в точках V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в точке T. Докажите, что

$$AU = TB + TC.$$

(Великобритания)

М1627. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n|=1$$

и

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Докажите, что существует перестановка $y_1, y_2, \ldots, x_n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что

$$|y_1+2y_2+\ldots+ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

(Россия)

М1628. Таблица $n\times n$, заполненная числами из множества $S=\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1\}$, называется серебряной, если для любого $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ объединение i-ой строки и i-го столбца содержит все числа из S.
Покажите, что:
а) не существует серебряной таблицы для $n = 1997$;
б) серебряные таблицы существуют для бесконечного числа значений n.

(Иран)

М1629. Найдите все пары $(a,\ b)$ целых чисел $a \ge 1$, $b \ge 1$, удовлетворяющих уравнению

$$a^{\left(b^2\right)} = b^a.$$

(Чехия)

М1630. Для любого натурального числа n обозначим через $f(n)$ число способов представления числа n в виде суммы целых неотрицательных степеней числа 2. Представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Например, $f(4) = 4$, так как число 4 может быть представлено следующими четырьмя способами: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1. Докажите, что для любого целого числа $n \ge 3$

$$2^{n^2/4} < f\left(2^n\right) < 2^{n^2/2}.$$

(Литва)

Ф1628. Пластинка радиусом 20 см равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая 33 оборота в минуту. От центра пластинки к ее краю ползет строго вдоль радиуса жучок маленького размера, его скорость постоянна по величине и составляет 10 см/с. При каком минимальном коэффициенте трения жучка о поверхность пластинки он сумеет добраться таким образом до края пластинки?

А.Жучков

Ф1629. Два одинаковых кубика массой M каждый стоят почти соприкасаясь гранями на гладкой горизонтальной поверхности. Сверху на них аккуратно помещают шар массой m, который начинает смещаться вертикально вниз, раздвигая кубики в стороны. Найдите скорость шара непосредственно перед ударом о горизонтальную поверхность. Начальная скорость шара пренебрежимо мала. Радиус шара R, ребро кубика H. Трения нигде нет.

З.Рафаилов

Ф1630. На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой M и длиной L. Посредине тележки находится кубик маленького размера, его масса m. Кубику сообщают толчком скорость v по направлению к одному из бортиков тележки. Найдите смещение тележки к тому моменту, когда кубик снова окажется посредине тележки, испытав ровно 17 ударов. Считать удары кубика о бортики тележки абсолютно упругими.

Р.Александров

Ф1631. Три маленьких заряженных тела одной и той же массы движутся в пространстве вдали от всех других тел. В некоторый момент тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение среднего равно по величине a и ускорение одного из оставшихся в этот момент составляет по величине $3a$. Найдите ускорение третьего тела в этот же момент времени.

М.Учителев

Ф1632. Куб с ребром a = 10 см, имеющий массу M = = 1 кг, подвешен на пружине жесткостью k = 400 Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток маленьких упругих шариков, обладающих скоростью v_0 = 20 м/с на высоте первоначального положения нижней грани куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно вдоль вертикальной оси. Найдите период и амплитуду этих колебаний. Оказывается, колебания эти медленно затухают, хотя никакого трения тут нет. Объясните причину затухания колебаний и оцените время, в течение которого амплитуда уменьшится на 10%. Масса одного шарика m = 1 г, концентрация шариков в потоке n = = 1000 м$^{-3}$. Ударами шариков друг о друга пренебречь.

А.Зильберман

Ф1633. Цикл тепловой машины состоит из двух адиабат и двух изохор. Найдите КПД цикла, если известны температуры T_1 и T_2 — начальная и конечная для одной из адиабат. Рабочее тело — идеальный газ.

А.Зильберман

Ф1634. В распоряжении физика есть два тепловых резервуара — очень горячий с температурой +200 °С и просто горячий с температурой +70 °С. Окружающая среда имеет постоянную температуру +20 °С. Физику велено сообщить очень горячему телу количество теплоты 1000 Дж и просто горячему — количество теплоты 2000 Дж. Какую минимальную механическую работу ему придется для этого совершить? Теплоемкости горячего и очень горячего тел можно считать очень большими.

А.Теплов

Ф1635. Нелинейный двухполюсник имеет вольт-амперную характеристику, которая описывается формулой $U = 10\ I^2$, где ток измеряется в амперах, а напряжение — в вольтах. Два таких двухполюсника соединены последовательно и подключены к идеальной батарейке с напряжением $\mathscr{E}$ = 10 В. Параллельно одному из двухполюсников подключают резистор. При каком сопротивлении этого резистора тепловая мощность, которая на нем выделяется, окажется максимальной?

З.Рафаилов

Ф1636. К идеальной батарейке подключены последовательно конденсатор емкостью C = 100 мкФ и амперметр, сопротивление которого r = 10 Ом. При помощи быстродействующего переключателя конденсатор в этой цепи переключается $n = 100$ раз в секунду то в одной, то в другой полярности (выводы конденсатора все время меняются местами друг с другом); стрелка прибора при этом практически не дрожит. Обычный магнитоэлектрический амперметр показывает в таком случае силу тока $I_1 = 0{,}01$ А. Что покажет в такой цепи амперметр тепловой системы с тем же сопротивлением? Приборы были отградуированы в цепи постоянного тока.

А.Повторов

Ф1637. Катушка индуктивностью $L = 1$ Гн присоединена параллельно конденсатору емкостью $C = 10$ мкФ, последовательно с получившимся контуром включен еще один такой же конденсатор и к получившейся цепи подключен генератор низкой частоты с апмплитудой выходного напряжения $U_0 = 1$ В. На какой частоте ток, потребляемый от генератора цепью, получается очень малым? На какой частоте этот ток резко возрастает? Оцените максимальную амплитуду напряжения на катушке, если сопротивление провода ее обмотки $R = 10$ Ом. Остальные элементы цепи считайте идеальными.

А.Повторов