конечной геометрической прогрессии, получим $S = 10/(1 - 1/3)$ В = 15 В.

Р.Александров

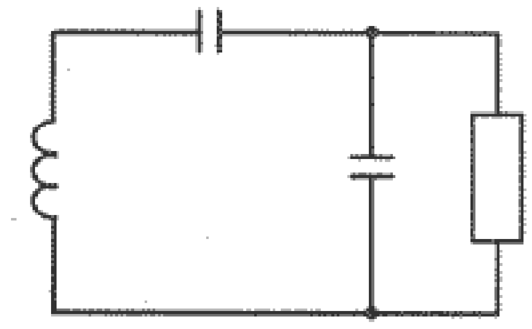
Ф1621. *Катушка индуктивности состоит из нескольких одинаковых витков очень тонкого провода, намотанных вплотную друг к другу. На оси катушки на некотором расстоянии от нее расположили еще один такой же замкнутый виток так, что ось витка совпадает с осью катушки. Катушку подключили к выходу источника переменного тока, при этом амплитуда тока отдельно расположенного витка оказалась в $k = 3$ раза меньше амплитуды тока катушки. Во сколько раз отличаются величины индуктивности катушки, измеренные без дополнительного витка и вместе с ним? Сопротивление провода, из которого сделаны витки, пренебрежимо мало. Считайте, что индуктивность катушки без дополнительного витка в 30 раз больше индуктивности одного витка.*

Обозначим число витков катушки N, тогда при токе I она создаст около одиночного витка поле B, пропорциональное этому току и числу витков катушки: $B = \alpha NI$. Поток, который пронизывает при этом одиночный виток площадью S, равен $\Phi_{21} = \alpha NIS$. Из условия задачи следует, что этот поток в k раз меньше «своего» потока — создаваемого при токе I в каждом из витков самой катушки. Если индуктивность одного витка L_0, то можно записать: $\alpha NIS = L_0 I/k$. Поле одиночного витка с током I/k создает магнитный поток через все витки катушки, равный $\Phi_{12} = \alpha(I/k)SN$. Этот поток вычитается из собственного потока катушки (правило Ленца) и уменьшает измеренную величину индуктивности катушки. Отсюда

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_1 I}{L_1 I - L_0 I/k^2} = \frac{1}{1 - L_0/\left(L_1 k^2\right)} = \frac{1}{1 - 1/\left(30k^2\right)} \approx \frac{270}{269} \approx 1{,}004.$$

А.Зильберман

Ф1622. *Колебательный контур состоит из катушки индуктивности и двух одинаковых конденсаторов, включенных между собой последовательно. Катушка и конденсаторы практически идеальные, но из-за наличия малого сопротивления соединяющих проводов $r = 0{,}1$ Ом колебания медленно затухают: за $n_1 = 10$ периодов колебаний амплитуда тока через катушку уменьшается на $\alpha = 1\%$. Параллельно одному из конденсаторов подключают резистор (см. рисунок), и теперь амплитуда колебаний уменьшается на тот же 1% за $n_2 = 2$ полных периода колебаний. Найдите сопротивление этого резистора.*



Рассмотрим вначале случай, когда подключение резистора изменяет частоту контура незначительно, т.е. когда подключен большой резистор. В этом случае в нем за период должно рассеиваться тепла в 4 раза больше, чем в последовательном резисторе сопротивлением r (общая мощность потерь возросла в 5 раз). Затухание и в этом случае можно считать малым, поэтому действующее (эффективное) значение силы тока (и напряжения) будем брать как для синусоидального. Тогда для случая только последовательного резистора (с учетом того, что 1% по амплитуде это 2% по энергии) получим

$$r\left(I_0^2/2\right)\cdot 10T = \frac{0{,}02LI_0^2}{2}.$$

Период для нашего контура $T = 2\pi\sqrt{LC/2}$. Для параллельного резистора (напряжение на нем — половина напряжения на катушке) запишем

$$\frac{\left(U_0/2\right)^2}{2R_1} = \frac{4rI_0^2}{2};$$

в нашем контуре с последовательно соединенными конденсаторами —

$$\frac{CU_0^2}{4} = \frac{LI_0^2}{2}.$$

Окончательно получим

$$R_1 = \frac{10^6\pi^2 r}{16} \approx 6\cdot 10^4 \text{ Ом}.$$

Есть и другая возможность удовлетворить формально условию задачи — взять маленький резистор, «закоротив» один из конденсаторов и увеличив этим период колебаний в контуре. При этом

$$r\left(I_0^2/2\right)\cdot 10T = \left(r + R_2\right)\left(I_0^2/2\right)\cdot 2\cdot 1{,}41T,$$

$$R_2 = 2{,}5r = 0{,}25 \text{ Ом}.$$

А.Контуров

УСРЕДНЕНИЕ ПО ОКРУЖНОСТИ

Одиннадцатиклассники на Московской олимпиаде (точнее, на отборочном туре на российскую олимпиаду) решали такую задачу:

М1596. *Про непрерывную функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[0; 5]$, известно, что $\int_0^5 f(x)\,dx = 0$. Докажите, что на этом отрезке найдутся такие числа a и b, что $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ и при этом $b - a = 2$ или 3.*

Решение основано на двух идеях:

• среднее значение функции заключено между максимальным и минимальным значениями (нематематики формулируют это так: «если тебе слишком хорошо, то кому-то плохо»);

• всякая определенная на отрезке непрерывная функция, среди значений которой есть и положительное,

Рис. 1

и отрицательное, обращается в нуль в некоторой точке этого отрезка (теорема о промежуточном значении).

Обе идеи очень важны и часто используются в математическом анализе. Но начнем мы издалека — с задачи, предлагавшейся пятиклассникам на окружном туре Московской олимпиады:

Задача 1. *По кругу лежат 5 монет гербом вниз. Разрешается переворачивать одновременно три монеты, лежащие подряд. Как таким способом положить все монеты гербом вверх?*

Не видите связи? Ничего, скоро все прояснится. А пока переворачивайте монеты. Перевернули? Если не сделали лишних движений, то каждая монета участвовала в трех операциях (рис.1). Продолжим подготовку к решению M1596:

Задача 2. *По кругу записаны 20 чисел. Сумма любых трех последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательной?*

Решение. Сложим все 20 сумм, образованных тройками подряд стоящих чисел. Разделив полученную (положительную!) сумму на 3, получим в точности сумму всех 20 записанных по кругу чисел.

Завершит подготовку задача, в которой уже легче угадать некоторые черты M1596:

Задача 3. *В ряд стоят 30 сапог, 15 из которых левые, 15 — правые. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.*

Решение. Рассмотрим первые 10 сапог. Если среди них левых и правых поровну, то больше ничего делать не надо. Если не поровну, пусть, для определенности, правых сапог больше.

Для каждых 10 подряд стоящих сапог рассмотрим разность между числом правых и левых сапог. Мы предположили, что для первых 10 сапог эта разность положительна. Разбив ряд из 30 сапог на три отрезка по 10 сапог в каждом, видим, что все три соответствующие разности не могут быть положительны (иначе всего правых сапог было бы больше, чем левых). Значит, хотя бы одна из разностей неположительна.

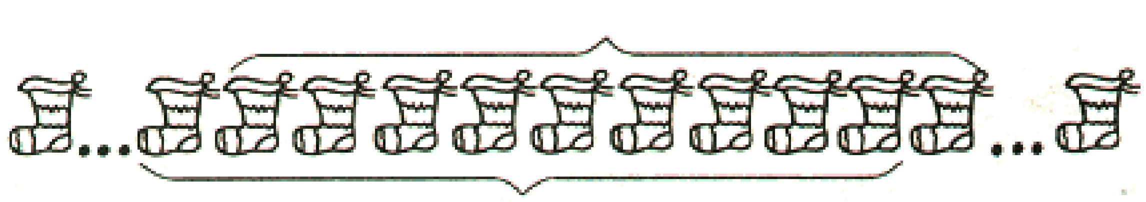


Рис. 2

Задумаемся, как меняется разность при «сдвиге на один сапог» (рис.2). Поскольку добавляется один сапог и исчезает тоже один, разность или не меняется, или меняется на 2.

Осталось применить нечто вроде теоремы о промежуточном значении.

Упражнение 1. Сделайте это, заметив предварительно, что все рассматриваемые разности четны.

Упражнение 2. Можно ли по кругу расставить 7 целых чисел так, чтобы сумма любых трех соседних равнялась 19?

Упражнение 3. Даны 100 чисел. Известно, что произведение любых 17 из них больше 1. Докажите, что произведение всех 100 чисел больше 1.

Решение задачи M1596

Первый способ. Если бы в олимпиаде участвовали не школьники, а студенты, то они, наверное, рассуждали бы следующим образом. «Согнем» отрезок в окружность длиной 5, склеив его концы. На окружности определим естественным образом функцию f, любым образом выбрав ее значение в «точке склейки» (например, взяв одно из значений функции в склеившихся концах — ведь значение интеграла не меняется при изменении значения функции в одной точке).

Пусть дуга длиной 2 скользит вдоль окружности. Тогда интеграл, вычисленный по этой дуге, непременно зависит от положения дуги. *Если величина интеграла все время одного и того же знака (например, положительна), то того же знака величина* $\int_0^5 f(x)\,dx$, *а она по условию равна 0.*

Если же эта величина меняет знак, то, по теореме о промежуточном значении, в какой-то момент она обратится в 0. При этом рассматриваемая дуга может содержать или не содержать «точку склейки». В первом случае перейдем к дополнению — длина дополнения как раз равна 3. Во втором случае и так все ясно.

Это решение не использует того, что 2 и 3 — целые числа. Следовательно, если на отрезке длиной l задана функция, интеграл от которой по всему отрезку равен нулю, то для любого числа a $(0 < a < l)$ на отрезке найдется отрезочек длиной a или $l - a$, интеграл по которому равен нулю.

Есть в этом решении один недостаток: выделенный курсивом факт очевиден для студента, но не вполне очевиден для школьника. Жюри олимпиады надеялось получить другое решение:

Второй способ. Изменим значение функции f в точке $x = 5$, чтобы оно стало равно ее значению в точке $x = 0$.

Продолжим функцию на всю прямую, считая ее периодической с периодом 5. Пусть $F(x) = \int_0^t f(x)\,dx$. Функция F также имеет период 5 (поскольку $F(t+5) - F(t) = \int_t^{t+5} f(x)\,dx = 0$).

Докажем, что для некоторого t выполняется равенство $F(t) = F(t + 2)$. Рассмотрим функцию $g(t) = F(t + 2) - F(t)$. Заметим, что $F(10) = 0$ и $F(0) = 0$. Значит, сложив величины $g(8) = F(10) - F(8)$, $g(6)$, $g(4)$, $g(2)$ и $g(0)$, получим 0. Следовательно, эти пять чисел не могут быть все положительны или все отрицательны. Пусть $g(m)$ и $g(n)$ разного знака и $m < n$. По теореме о промежуточном значении, в некоторой точке t_0 отрезка $[m, n]$ функция g обратится в 0. Если $t_0 \le 3$, то $\int_{t_0}^{t_0+2} f(x)\,dx = 0$. Если же $3 <$ $< t_0 \le 5$, то $\int_{t_0-3}^{t_0} f(x)\,dx = F(t_0) - F(t_0-3) = F(t_0) - F(t_0+2) =$ $= 0$.

Ни один школьник это решение не придумал. Но многие (видимо, благодаря знакомству с задачами 1—3) решали задачу, разбивая отрезок на 5 единичных отрезочков и обозначая интегралы функции f по отрезкам $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, $[3; 4]$, $[4; 5]$ буквами p, q, r, s, t соответственно (заметьте: $p = F(1) - F(0)$, ..., $t =$ $= F(5) - F(4)$).

Третий способ. Если среди сумм $p + q + r$, $q + r + s$ и $r + s + t$, являющихся значениями интеграла по отрезкам длиной 3, есть числа разного знака, то, по теореме о промежуточном значении, найдется отрезок длиной 3, интеграл по которому равен нулю. Значит, можно считать, что суммы $p+q+r$, $q+r+s$ и $r+s+t$ положительны.

Тогда $s + t = -(p+q+r) < 0$. Опять ссылаясь на теорему о промежуточном значении, видим, что суммы $p + q$, $q + r$, $r + s$, равные интегралам по отрезкам длиной 2, можно считать отрицательными.

Упражнение 4. Доведите решение до конца.

Отличие отрезка от окружности, или Почему «2 или 3», а не просто 2?

Может ли так быть:
каждый день все хорошо,
а в целом плохо?

Опять начнем с дискретного варианта. В задаче 2 числа располагались по кругу.

Задача 4. *В ряд записаны 20 чисел. Сумма любых трех последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательна?*

Решение. Может! Рассмотрим последовательность

$$a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ a,\ b.$$

Сумма любых трех подряд ее членов равна $a + b + c$; сумма всех 20 членов равна $7a + 7b + 6c$.

Упражнение 5. Завершите решение задачи 4, подобрав числа a, b, c так, чтобы выполнялись неравенства $a + b + c > 0$, $7a +$ $+ 7b + 6c < 0$.

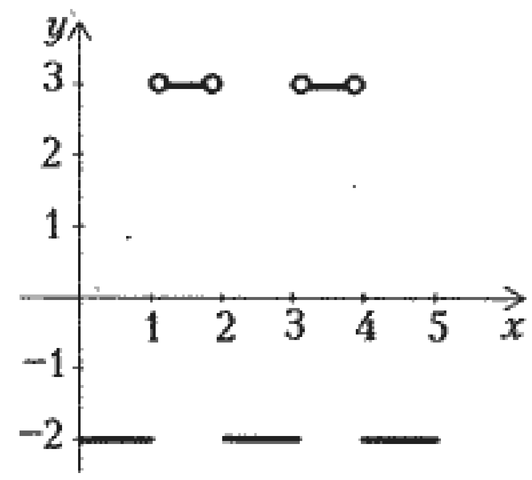


Рис.3

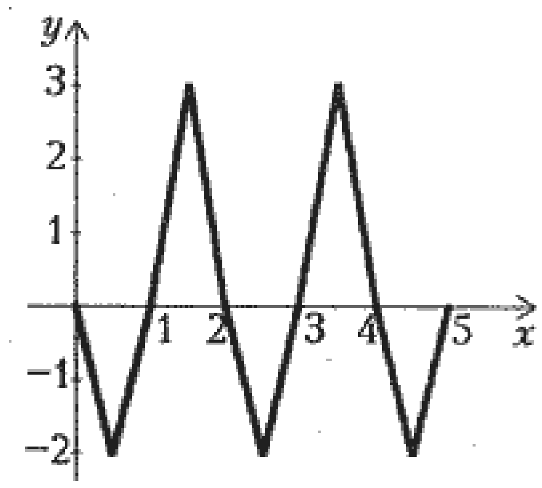


Рис.4

Упражнение 6. Бухгалтер каждый месяц подсчитывал доход и расход предприятия. Мог ли доход за любые 5 подряд идущих месяцев превышать расход, а за весь год, наоборот, оказаться меньше расхода?

Упражнение 7. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/ч?

От сумм вернемся к интегралам. Мы доказали, что для некоторого t выполняется равенство $F(t + 2) = F(t)$. Нельзя ли в условии М1596 вычеркнуть слова «или 3»?

Оказывается, нельзя. Подражая решению задачи 4, рассмотрим функцию, равную -2 при $x \in [0; 1] \cup [2; 3] \cup [4; 5]$ и равную 3 при $x \in (1; 2) \cup (3; 4)$ (рис.3). Ее интеграл по любому отрезку длиной 2 (содержащемуся в $[0;5]$) равен 1. Впрочем, в М1596 функция должна быть непрерывной.

Задача 5. *Придумайте непрерывную функцию, интеграл от которой по отрезку $[0; 5]$ равен нулю, а интегралы по всем содержащимся в $[0; 5]$ отрезкам длиной 2 положительны.*

Решение. График — на рисунке 4.

В заключение вспомним классическую задачу про функцию на отрезке, о которой рассказывалось в статье И.М.Яглома «О хордах непрерывных кривых» (см. «Квант» №4 за 1977 г.). Мы сформулируем ее так, чтобы была видна тесная связь с задачей М1596:

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[0; 1]$ и $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Для каких h можно утверждать, что интеграл функции f по некоторому отрезку длиной h равен 0?

В этой задаче замечательный ответ: h должно равняться одному из чисел $1/n$, где n натуральное. Докажите это (и постройте примеры, показывающие, что для других h ответ отрицателен).

В.Произволов, А.Спивак

ПОПРАВКА

В условии задачи М1612 (см. «Квант» №5 за 1997 г.) допущена ошибка: числа расставляются в клетках таблицы 10×10, а не $m \times n$. Приносим извинения нашим читателям.