Распределение заряда на тонком диске

А.ЧЕРНОУЦАН

Если спросить у школьника (даже весьма подготовленного), что произойдет, если на тонкую металлическую пластину площадью S поместить заряд q, то почти наверняка можно услышать такой ответ: «Заряд распределится по пластине почти равномерно, кроме самых краев; непосредственно у поверхности напряженность поля будет направлена перпендикулярно пластине и равна $E = q/(2\varepsilon_0 S)$». Откуда берется такой ответ, понятно. Школьник воспринимает изолированную пластину как половину хорошо известного ему плоского конденсатора. Но такое представление ошибочно. Равномерное распределение заряда по пластинам плоского конденсатора возникает в результате взаимного влияния этих заряженных пластин, и для изолированной пластины распределение заряда по поверхности может заметно отличаться от равномерного. Это распределение сильно зависит от формы пластины и в общем случае может быть получено только на компьютере. Однако для пластины круглой формы – металлического диска – результат можно получить точно. Сделаем это, но прежде вспомним основные свойства электростатического поля в присутствии проводников.

Теорема единственности. Основные свойства проводников сводятся к следующим:

1) Напряженность поля внутри проводника равна нулю.

2) Все точки проводника (любого!) обладают одним и тем же потенциалом – его называют *потенциалом проводника*. В случае изолированного проводника этот потенциал пропорционален заряду: $q = C\varphi$ (C – емкость изолированного проводника).

3) Заряд проводника расположен только на его поверхности (в объеме проводника заряд отсутствует).

4) Вблизи проводника напряженность поля направлена перпендикулярно его поверхности.

Если распределение заряда по поверхности проводника заранее неизвестно, то угадать его (кроме самых простых случаев) довольно сложно. Существенную помощь при решении задач оказывает *теорема единственности*: существует единственное распределение зарядов, удовлетворяющее перечисленным свойствам. Значит, если удалось угадать какое-нибудь распределение заряда, при котором поле внутри проводника отсутствует, то это распределение и будет правильным. На этом принципе основан, в частности, известный *метод электростатических изображений* (см., например, «Квант» № 1 за 1996 г.). Единственность окажет помощь и в нашем случае.

Тонкий диск. Рассмотрим тонкий проводящий диск радиусом R, на котором находится заряд q. Так как объем диска близок к нулю, надо следить за полем не в объеме диска, а возле его поверхности. А именно, нужно найти такое распределение заряда по поверхности, при котором напряженность поля возле любой точки диска направлена перпендикулярно его поверхности. Чтобы сделать это, поступим следующим образом.

Возьмем проводящую сферу радиусом R и поместим на нее заряд q. Ясно, что этот заряд распределится по поверхности равномерно с поверхностной плотностью $\sigma_0 = q/(4\pi R^2)$. Напряженность поля внутри сферы будет при этом равна нулю. Хотя это утверждение можно считать очевидным (скажем, из соображений единственности), полезно вспомнить, как оно доказывается с помощью принципа суперпозиции. Рассмотрим внутри сферы произвольную точку A, и построим тонкий конус с вершиной в этой точке (рис. 1,*а*). Этот конус отсекает от сферы две маленькие площадки. Из подобия следует, что отношение их площадей равно отношению квадратов расстояний: $S_1/S_2 = r_1^2/r_2^2$. Следовательно, напряженности полей, создаваемые в точке A этими площадками, равны по величине ($k\sigma_0 S_1/r_1^2 = k\sigma_0 S_2/r_2^2$) и, поскольку направления слагаемых напряженностей противоположны, результирующая напряженность равна нулю.

Начнем деформировать сферу, сжимая ее вдоль одного из направлений (рис.1,*б*). Но не позволим зарядам растекаться по поверхности получившейся «лепешки» (по научному – эллипсоида), выбирая известное им единственно правильное распределение, а будем считать их как бы приклеенными к поверхности. Это значит, что заряд, находившийся на некоторой площадке, после ее деформации останется таким же. При этом для каждой степени сжатия мы можем рассчитать распределение заряда по поверхности получившегося эллипсоида. Рецепт следующий: вычислим, во сколько раз уменьшится площадь маленького кусочка поверхности – во столько же раз увеличится поверхностная плотность заряда. Например, при линейном сжатии в 2 раза поверхностная плотность заряда на полюсах останется равной σ_0, а на экваторе увеличится до $2\sigma_0$.

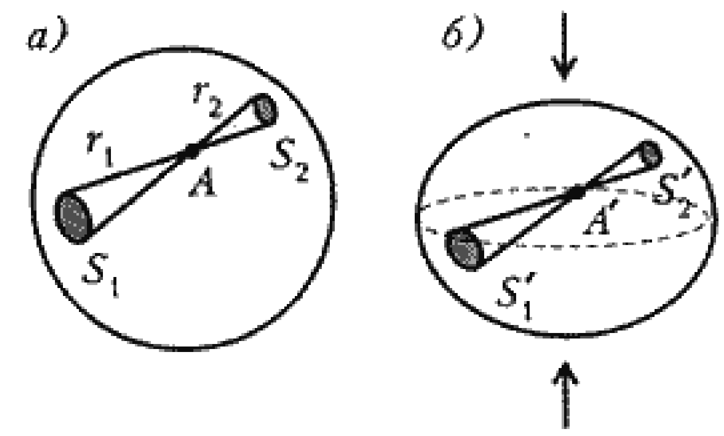

Рис. 1

Самое замечательное, что принудительно построенное нами распределение заряда как раз и является правильным! Действительно, в результате сжатия деформированные конусы останутся подобными, и создаваемая площадками S_1' и S_2' в точке A' напряженность останется равной нулю. Значит, угаданное нами распределение заряда дает внутри эллипсоида нулевую напряженность, а снаружи вблизи эллипсоида напряженность перпендикулярна его поверхности.

Наверное, вы уже догадались, как теперь перейти к бесконечно тонкому проводящему диску – надо просто устремить к бесконечности степень сжатия! При этом круглая полоска шириной Δr на поверхности сферы перейдет в полоску шириной $\Delta r' = \Delta r \cos\alpha$ на диске, т.е. площадь полоски уменьшится в $1/\cos\alpha$ раз (рис.2). Значит, на расстоянии r от центра диска поверхностная плотность заряда (с одной стороны диска) будет равна

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{\cos\alpha} = \frac{\sigma_0 R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (*)$$

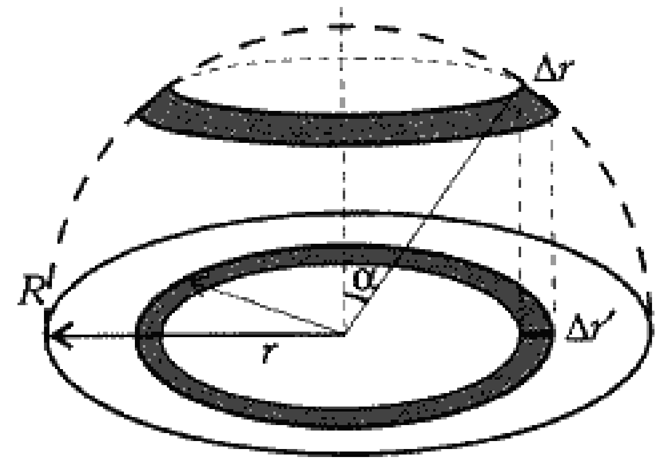

Рис. 2

Видно, что распределение заряда совсем не похоже на равномерное. Поверхностная плотность заряда при удалении от центра возрастает, а при приближении к краю диска стремится к бесконечности. Отметим, что поверхностная плотность заряда в центре диска $\sigma_0 = q/\left(4\pi R^2\right)$ в два раза меньше, чем была бы при равномерном распределении заряда ($\sigma = q/\left(2\pi R^2\right)$). В два раза меньше будет и напряженность поля возле центра диска.

Емкость тонкого диска радиусом *R*. Используя полученное нами распределение заряда по поверхности диска, мы можем найти его емкость. Для чего это нужно? Ну например, зная емкость, можно определить энергию электрического поля, создаваемого заряженным диском, что часто бывает полезно для решения задач.

Чтобы вычислить электроемкость, надо найти потенциал диска. Проще всего это сделать для центра диска. Разбивая диск на тонкие круглые полоски, получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2\sigma(r)dS}{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2\sigma_0 R\cdot 2\pi r dr}{r\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{\pi\sigma_0 R}{2\varepsilon_0}$$

(такой интеграл можно найти в таблице или взять самостоятельно, сделав замену $r = R\sin\alpha$). Учитывая, что $q = \sigma_0 \cdot 4\pi R^2$, найдем емкость диска по формуле $C = q/\varphi$:

$$C = 8\varepsilon_0 R.$$

Упражнение

Какую работу надо совершить, чтобы две круглые обкладки плоского конденсатора разнести на очень большое расстояние друг от друга? Начальное расстояние d между пластинами много меньше их радиуса R, заряд конденсатора q.

Две одинаково заряженные плоские пластины. Рассмотрим плоский конденсатор с круглыми пластинами, расстояние между которыми d много меньше их радиуса R. Что произойдет, если зарядить эти пластины одинаковыми по величине и знаку зарядами? Ответ следующий: практически весь заряд каждой пластины окажется распределен по ее внешней стороне по закону, определяемому формулой (∗). Заряд на внутренней стороне и поле между пластинами будут ничтожно малыми. Объяснить такой результат проще всего с помощью теоремы единственности. Возьмем сначала пластину радиусом R с малой толщиной d и нанесем на нее двойной заряд. Он распределится по ее поверхностям по закону, близкому к случаю бесконечно тонкой пластины. Теперь вырежем внутреннюю часть. Так как она почти не заряжена, распределение заряда почти не изменится. Значит, в этом случае взаимодействие между пластинами сводится к выталкиванию зарядов на внешние стороны пластин.

Плоский конденсатор. Теперь зарядим эти же пластины «как положено» — зарядами, одинаковыми по величине, но противоположными по знаку. Ситуация кардинально изменится. Почти весь заряд окажется на внутренней стороне пластин, причем распределится практически равномерно. Все дело в том, что в этом случае в пространстве между пластинами существует электрическое поле. Напряженность поля $\vec{E}$ направлена перпендикулярно пластинам, и разность потенциалов U между пластинами постоянна и в любом месте равна $U = Ed$. А поскольку расстояние между пластинами всюду одно и то же, то и напряженность поля, и поверхностная плотность заряда так же почти всюду одинаковы (кроме краев). Перпендикулярность поля поверхности пластин теперь обеспечивается автоматически — за счет суперпозиции напряженностей от положительной и отрицательной пластин (рис.3) — и не требует специального распределения по поверхности, как в случае изолированной пластины. Таким образом взаимодействие между пластинами привело к кардинальному перераспределению заряда.

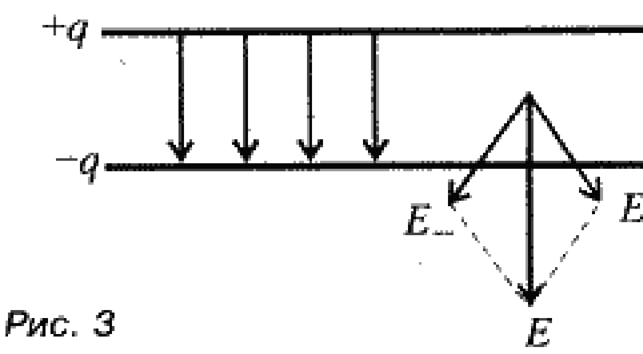

Рис. 3

Как видно из приведенных рассуждений, равномерное распределение заряда по поверхности обеспечивается постоянным расстоянием между пластинами. Если бы расстояние между пластинами медленно менялось, то в более узком месте и напряженность поля, и поверхностная плотность заряда были бы больше.

Произвольно заряженные пластины. К разобранным нами двум случаям — пластины, заряженные одноименными или разноименными зарядами — можно свести и общий случай произвольно заряженных пластин. Действительно, пусть на одну пластину нанесли заряд q_1, а на другую — заряд q_2. Тогда общий заряд пластин равен $Q = q_1 + q_2$. Будем считать, что пластины заряжали в два этапа: сначала на них поместили одноименные заряды $Q/2$, а потом на первую пластину поместили заряд $q = (q_1 - q_2)/2$, а на вторую — заряд $-q$. Тогда поле в пространстве между пластинами и разность потенциалов между ними будут определяться зарядом q, равномерно распределенным по внутренней поверхности, а поле вне пластин — зарядом Q, неравномерно распределенным по внешней поверхности (в случае круглых пластин это распределение описывается формулой (∗)).

ДОПОЛНЕНИЕ К СТАТЬЕ «ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МФТИ»

(см. «Квант» № 6 за 1997 г.)

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует выслать вступительные работы по адресу:

252680 г.Киев, пр.Вернадского, д.36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Телефон для справок: 444-95-24.