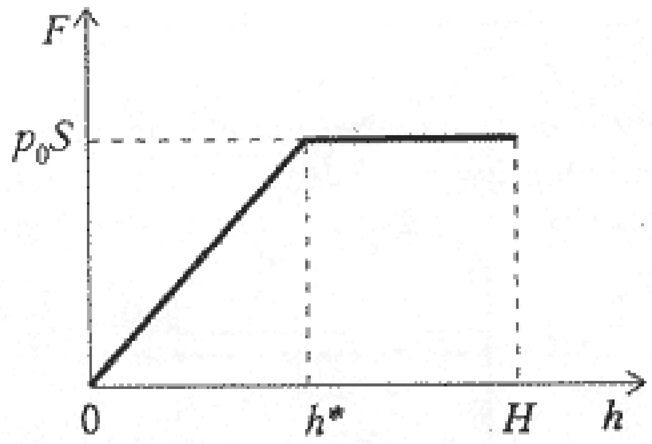

Рис. 2

Зависимость величины F от h представлена в виде графика на рисунке 2. Площадь под графиком и равна искомой работе:

$$A = \frac{1}{2}p_0Sh^* + p_0S\left(H - h^*\right) = p_0S\left(H - \frac{h^*}{2}\right) = p_0S\left(H - \frac{p_0}{2\rho g}\right) = 10^4 \text{ Дж}.$$

Задача 3. *Лыжник съезжает с нулевой начальной скоростью, не отталкиваясь палками, со склона холма по прямой, составляющей некоторый угол с горизонтальной плоскостью, и, проехав по склону расстояние $s_0 = 60$ м, останавливается, увязнув в снегу. Условия движения таковы, что сила сопротивления, действующая на лыжника со стороны снега, пропорциональна пройденному пути; коэффициент пропорциональности $k = 6{,}4$ Н/м. Найдите величину максимальной скорости лыжника при спуске, если его масса с инвентарем $m = 90$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

На съезжающего по склону холма лыжника действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции, перпендикулярная траектории, и сила сопротивления, равная $F_c = ks$, где s — длина пройденного пути, и направленная по касательной к траектории лыжника противоположно вектору его скорости.

По теореме об изменении кинетической энергии, для отрезка пути $s \le s_0$ имеем

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A_{\text{тяж}} + A_c.$$

Здесь v — величина скорости лыжника в момент, когда он прошел путь s. Работа постоянной силы тяжести находится по формуле

$$A_{\text{тяж}} = mgs\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mgs\sin\alpha,$$

где α — угол наклона прямолинейной траектории лыжника к горизонту. Работа силы сопротивления, во-первых, отрицательна (так как сила и перемещение противонаправлены), а во-вторых, — это работа переменной силы. График зависимости F_c от s представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Как и в задаче 1, площадь под графиком имеет смысл величины соответствующей работы:

$$A_c = -\frac{1}{2}sks = -\frac{ks^2}{2}.$$

Возвращаясь к теореме об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = mgs\sin\alpha - \frac{ks^2}{2}.$$

Искомая в задаче максимальная скорость соответствует максимальному значению правой части этого равенства. Поскольку правая часть равенства — квадратичная функция пути, ее максимальное значение находится при значении s, равном полусумме путей s_1 и s_2, обращающих ее в ноль. Ясно, что $s_1 = 0$ и $s_2 = (2mg\sin\alpha)/k = s_0$. Таким образом, при $s = s_0/2 = (mg\sin\alpha)/k$ кинетическая энергия лыжника максимальна:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mg\frac{s_0}{2}\sin\alpha - \frac{k(s_0/2)^2}{2} = \frac{ks_0^2}{8}.$$

Отсюда находим искомую скорость:

$$v_{\max} = \frac{s_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 8 \text{ м/с}.$$

При расчете работы силы сопротивления принят во внимание линейный рост силы сопротивления с увеличением смещения s. Более того, суммарная сила $(mg\sin\alpha - ks)$ имеет характер квазиупругой возвращающей силы с положением равновесия при $s = s_0/2$. Следовательно, от старта до остановки лыжник движется по гармоническому закону, достигая максимальной скорости в положении $s = s_0/2$, причем $s_0/2$ — максимальное смещение от положения равновесия (амплитуда колебаний). Из кинематики гармонических колебаний известна связь амплитуд скорости и смещения:

$$v_{\max} = \frac{s_0}{2}\omega,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ — циклическая частота колебаний. Таким образом, результат для $v_{\max}$ можно получить и в терминах амплитуд колеблющихся величин.

* * *

Особый интерес представляет теорема об изменении кинетической энергии для системы нескольких взаимодействующих тел, движущихся относительно друг друга. Рассмотрим случай двух взаимодействующих тел.

Пусть $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на тело *1* массой m_1 со стороны тела *2* массой m_2, а $\vec{F}_{21}$ — сила, действующая на тело *2* со стороны тела *1*. В соответствии с третьим законом Ньютона,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Пусть также $\vec{F}_1$ — сумма всех сил, действующих на тело *1* со стороны всех тел, кроме тела *2*, т.е. это есть сумма всех внешних сил, приложенных к телу *1*. Аналогичный смысл имеет сила $\vec{F}_2$ в отношении тела *2*. Для каждого из двух тел запишем теорему об элементарном приращении его кинетической энергии:

$$\Delta\left(\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2}\right) = \vec{F}_{12}\vec{v}_1\Delta t + \vec{F}_1\vec{v}_1\Delta t,$$

$$\Delta\left(\frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}\right) = \vec{F}_{21}\vec{v}_2\Delta t + \vec{F}_2\vec{v}_2\Delta t.$$

Складывая почленно эти равенства, с учетом третьего закона Ньютона, находим

$$\Delta\left(\frac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2}\right) = \vec{F}_{12}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\Delta t + \vec{F}_1\vec{v}_1\Delta t + \vec{F}_2\vec{v}_2\Delta t.$$

В левой части этого равенства записано элементарное приращение кинетической энергии системы двух тел. Первое слагаемое в правой части — это вычисленная в системе отсчета, связанной с телом *2*, элементарная работа силы, действующей на тело *1* со стороны тела *2*. Второе и третье слагаемые — это элементарные работы внешних сил.

Теперь — задача.

Задача 4. *На гладкой горизонтальной плоскости покоится доска массой m_1. На доску со скоростью v въезжает шайба массой m_2 (рис.3). Какой должна быть минимальная длина доски l, чтобы шайба не соскользнула с нее? Коэффициент трения скольжения между шайбой и доской μ, размер шайбы мал по сравнению с длиной доски.*

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы тел m_1

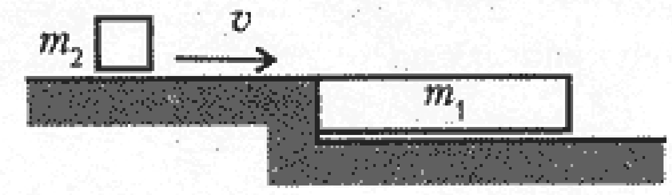

Рис. 3