

Теорема об изменении кинетической энергии в задачах механики

А. ОВЧИННИКОВ, В. ПЛИС

ЦЕЛЫЙ РЯД задач механики можно решить, опираясь на важное следствие второго закона Ньютона — теорему об изменении кинетической энергии. Эта теорема утверждает, что изменение (приращение) кинетической энергии материальной точки равно работе всех сил, приложенных к этой точке:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A.$$

Здесь m — масса материальной точки, v и v_0 — величины ее конечной и начальной скоростей, A — работа всех сил.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. Чтобы затолкнуть на горку санки массой $m = 5$ кг, прикладывая постоянную силу вдоль наклонной плоской поверхности горки, необходимо совершить работу не менее $A = 480$ Дж. С какой скоростью достигнет основания горки девочка на этих санках, если она съедет с горки с нулевой начальной скоростью по кратчайшему пути? Угол наклона плоскости горки к горизонту $\alpha = \arctg 0,2$. Коэффициент трения скольжения между санками и горкой $\mu = 0,1$.

На санки, движущиеся по горке вверх, действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции \vec{N}_1 , сила трения $\vec{F}_{тр1}$ и сила тяги \vec{F} . В соответствии со вторым законом Ньютона, записанным в проекциях на перпендикуляр к наклонной плоскости горки, находим $N_1 = mg \cos \alpha$. Тогда для величины силы трения скольжения имеем

$$F_{тр1} = \mu N_1 = \mu mg \cos \alpha.$$

По теореме об изменении кинетической энергии для санок, очень медленно движущихся вверх, получим

$$0 - 0 = A + A_{тяж1} + A_{тр1}.$$

В левой части равенства стоит разность

кинетических энергий санок в конце и в начале движения, а в правой части записаны следующие величины: A — работа силы тяги, $A_{тяж1} = mgl \cos(\pi/2 + \alpha) = -mgl \sin \alpha = -mgH$ — работа силы тяжести (здесь l — длина горки, H — ее высота), $A_{тр1} = (\mu mg \cos \alpha)l \cos \pi = -\mu mgs$ — работа силы трения (здесь s — длина основания горки). Работа силы реакции, перпендикулярной перемещению, равна нулю. Таким образом, описание подъема санок приводит к равенству

$$\frac{A}{m} = g(H + \mu s).$$

На спускающиеся с горки санки с девочкой действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$ (M — сумма масс девочки и санок), сила нормальной реакции величиной $Mg \cos \alpha$ и сила трения, равная $\mu Mg \cos \alpha$. По теореме об изменении кинетической энергии теперь имеем

$$\frac{Mv^2}{2} - 0 = A_{тяж2} + A_{тр2},$$

где в левой части равенства стоит разность кинетических энергий девочки с санками у основания горки и на старте (в верхней части горки), в правой части — сумма работ всех сил: $A_{тяж2} = Mgl \cos(\pi/2 - \alpha) = Mgl \sin \alpha = MgH$, $A_{тр2} = (\mu Mg \cos \alpha)l \cos \pi = -\mu Mgl \cos \alpha = -\mu Mgs$, а работа силы реакции, как и на этапе подъема равна нулю. После простых преобразований находим

$$\frac{v^2}{2} = g(H - \mu s).$$

Наконец, деление этой формулы на полученную ранее аналогичную формулу приводит окончательно к ответу на вопрос задачи:

$$v = \sqrt{\frac{2A \operatorname{tg} \alpha - \mu}{m \operatorname{tg} \alpha + \mu}} = 8 \text{ м/с.}$$

Задача 2. В водоеме укреплен вертикальная труба с гладкой внутрен-

ней поверхностью, вдоль которой герметично может скользить легкий поршень. Нижний конец трубы погружен

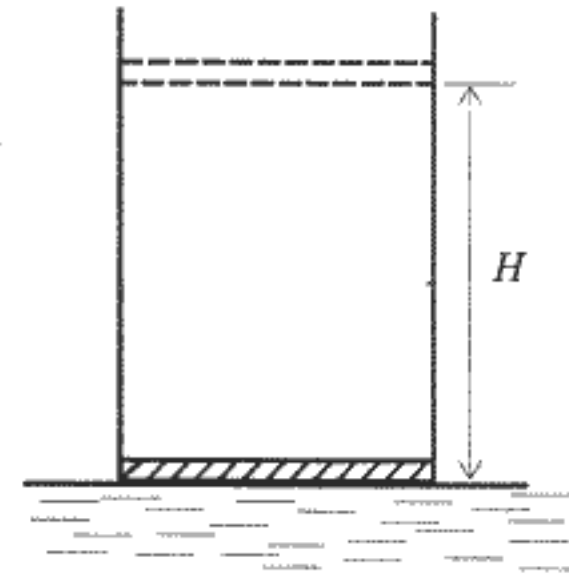


Рис. 1

в воду (рис.1). Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно поднимают на высоту $H = 15$ м. Найдите работу, которую необходимо при этом совершить. Площадь поршня $S = 1$ дм², атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Давлением насыщенных паров воды пренебречь.

Если поднять поршень на небольшую высоту h , приложив к нему направленную вертикально вверх силу величиной F , давление поршня на воду уменьшится. Таким образом, на одной и той же горизонтальной плоскости давление в воде под поршнем будет меньше, чем под открытой поверхностью в водоеме. Под действием этой разности давлений вода втягивается в трубу и поднимается на высоту h , в результате чего давление у основания водяного столба, равное сумме давления поршня на воду ($p_0 - F/S$) и гидростатического давления ρgh , станет равным атмосферному p_0 :

$$p_0 - \frac{F}{S} + \rho gh = p_0.$$

Отсюда находим

$$F = \rho ghS.$$

Заметим, что при высоте подъема воды $h^* = p_0/(\rho g) = 10$ м давление поршня на воду станет равным нулю, гидростатическое давление станет равным атмосферному давлению и поршень оторвется от воды. Между водой и нижней поверхностью поршня возникнет увеличивающееся пустое пространство (считается, что водяного пара или другого газа в этом пространстве нет). Минимальная сила, которую следует прикладывать к поршню при дальнейшем его подъеме, постоянна и равна p_0S .