Распределение заряда на тонком диске

А.ЧЕРНОУЦАН

Если спросить у школьника (даже весьма подготовленного), что произойдет, если на тонкую металлическую пластину площадью S поместить заряд q, то почти наверняка можно услышать такой ответ: «Заряд распределится по пластине почти равномерно, кроме самых краев; непосредственно у поверхности напряженность поля будет направлена перпендикулярно пластине и равна $E = q/(2\varepsilon_0 S)$». Откуда берется такой ответ, понятно. Школьник воспринимает изолированную пластину как половину хорошо известного ему плоского конденсатора. Но такое представление ошибочно. Равномерное распределение заряда по пластинам плоского конденсатора возникает в результате взаимного влияния этих заряженных пластин, и для изолированной пластины распределение заряда по поверхности может заметно отличаться от равномерного. Это распределение сильно зависит от формы пластины и в общем случае может быть получено только на компьютере. Однако для пластины круглой формы — металлического диска — результат можно получить точно. Сделаем это, но прежде вспомним основные свойства электростатического поля в присутствии проводников.

Теорема единственности. Основные свойства проводников сводятся к следующим:

1) Напряженность поля внутри проводника равна нулю.

2) Все точки проводника (любого!) обладают одним и тем же потенциалом — его называют *потенциалом проводника*. В случае изолированного проводника этот потенциал пропорционален заряду: $q = C\varphi$ (C — емкость изолированного проводника).

3) Заряд проводника расположен только на его поверхности (в объеме проводника заряд отсутствует).

4) Вблизи проводника напряженность поля направлена перпендикулярно его поверхности.

Если распределение заряда по поверхности проводника заранее неизвестно, то угадать его (кроме самых простых случаев) довольно сложно. Существенную помощь при решении задач оказывает *теорема единственности*: существует единственное распределение зарядов, удовлетворяющее перечисленным свойствам. Значит, если удалось угадать какое-нибудь распределение заряда, при котором поле внутри проводника отсутствует, то это распределение и будет правильным. На этом принципе основан, в частности, известный *метод электростатических изображений* (см., например, «Квант» № 1 за 1996 г.). Единственность окажет помощь и в нашем случае.

Тонкий диск. Рассмотрим тонкий проводящий диск радиусом R, на котором находится заряд q. Так как объем диска близок к нулю, надо следить за полем не в объеме диска, а возле его поверхности. А именно, нужно найти такое распределение заряда по поверхности, при котором напряженность поля возле любой точки диска направлена перпендикулярно его поверхности. Чтобы сделать это, поступим следующим образом.

Возьмем проводящую сферу радиусом R и поместим на нее заряд q. Ясно, что этот заряд распределится по поверхности равномерно с поверхностной плотностью $\sigma_0 = q/\left(4\pi R^2\right)$. Напряженность поля внутри сферы будет при этом равна нулю. Хотя это утверждение можно считать очевидным (скажем, из соображений единственности), полезно вспомнить, как оно доказывается с помощью принципа суперпозиции. Рассмотрим внутри сферы произвольную точку A, и построим тонкий конус с вершиной в этой точке (рис. 1,*а*). Этот конус отсекает от сферы две маленькие площадки. Из подобия следует, что отношение их площадей равно отношению квадратов расстояний: $S_1/S_2 = r_1^2/r_2^2$. Следовательно, напряженности полей, создаваемые в точке A этими площадками, равны по величине ($k\sigma_0 S_1/r_1^2 = k\sigma_0 S_2/r_2^2$) и, поскольку направления слагаемых напряженностей противоположны, результирующая напряженность равна нулю.

Начнем деформировать сферу, сжимая ее вдоль одного из направлений (рис.1,*б*). Но не позволим зарядам растекаться по поверхности получившейся «лепешки» (по научному — эллипсоида), выбирая известное им един-

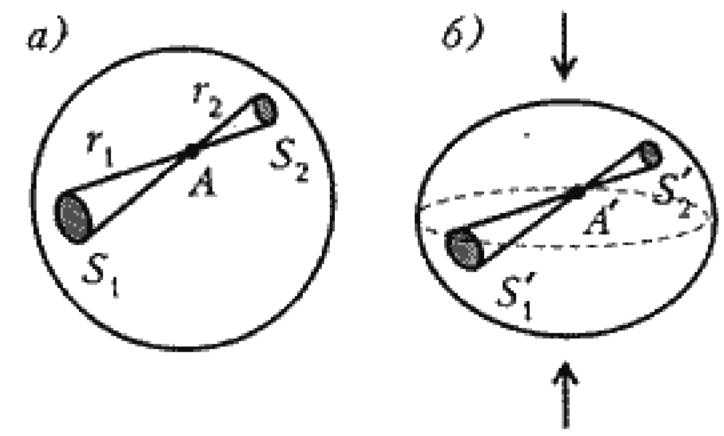

Рис. 1

ственно правильное распределение, а будем считать их как бы приклеенными к поверхности. Это значит, что заряд, находившийся на некоторой площадке, после ее деформации останется таким же. При этом для каждой степени сжатия мы можем рассчитать распределение заряда по поверхности получившегося эллипсоида. Рецепт следующий: вычислим, во сколько раз уменьшится площадь маленького кусочка поверхности — во столько же раз увеличится поверхностная плотность заряда. Например, при линейном сжатии в 2 раза поверхностная плотность заряда на полюсах останется равной σ_0, а на экваторе увеличится до $2\sigma_0$.

Самое замечательное, что принудительно построенное нами распределение заряда как раз и является правильным! Действительно, в результате сжатия деформированные конусы останутся подобными, и создаваемая площадками S_1' и S_2' в точке A' напряженность останется равной нулю. Значит, угаданное нами распределение заряда дает внутри эллипсоида нулевую напряженность, а снаружи вблизи эллипсоида напряженность перпендикулярна его поверхности.

Наверное, вы уже догадались, как теперь перейти к бесконечно тонкому проводящему диску — надо просто устремить к бесконечности степень сжатия! При этом круглая полоска шириной Δr на поверхности сферы перейдет в полоску шириной $\Delta r' = \Delta r\cos\alpha$ на диске, т.е. площадь полоски уменьшится в $1/\cos\alpha$ раз (рис.2). Значит, на расстоянии r от центра диска поверхностная плотность заряда (с одной стороны диска) будет равна

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{\cos\alpha} = \frac{\sigma_0 R}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (*)$$