получим 0. Следовательно, эти пять чисел не могут быть все положительны или все отрицательны. Пусть $g(m)$ и $g(n)$ разного знака и $m < n$. По теореме о промежуточном значении, в некоторой точке t_0 отрезка $[m, n]$ функция g обратится в 0. Если $t_0 \le 3$, то $\int_{t_0}^{t_0+2} f(x)\,dx = 0$. Если же $3 < t_0 \le 5$, то $\int_{t_0-3}^{t_0} f(x)\,dx = F(t_0) - F(t_0-3) = F(t_0) - F(t_0+2) = 0$.

Ни один школьник это решение не придумал. Но многие (видимо, благодаря знакомству с задачами 1–3) решали задачу, разбивая отрезок на 5 единичных отрезочков и обозначая интегралы функции f по отрезкам [0; 1], [1; 2], [2; 3], [3; 4], [4; 5] буквами p, q, r, s, t соответственно (заметьте: $p = F(1) - F(0)$, ..., $t = F(5) - F(4)$).

Третий способ. Если среди сумм $p + q + r$, $q + r + s$ и $r + s + t$, являющихся значениями интеграла по отрезкам длиной 3, есть числа разного знака, то, по теореме о промежуточном значении, найдется отрезок длиной 3, интеграл по которому равен нулю. Значит, можно считать, что суммы $p+q+r$, $q+r+s$ и $r+s+t$ положительны.

Тогда $s+t = -(p+q+r) < 0$. Опять ссылаясь на теорему о промежуточном значении, видим, что суммы $p + q$, $q + r$, $r + s$, равные интегралам по отрезкам длиной 2, можно считать отрицательными.

Упражнение 4. Доведите решение до конца.

Отличие отрезка от окружности, или Почему «2 или 3», а не просто 2?

Может ли так быть:
каждый день все хорошо,
а в целом плохо?

Опять начнем с дискретного варианта. В задаче 2 числа располагались по кругу.

Задача 4. *В ряд записаны 20 чисел. Сумма любых трех последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательна?*

Решение. Может! Рассмотрим последовательность

$$a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ a,\ b.$$

Сумма любых трех подряд ее членов равна $a + b + c$; сумма всех 20 членов равна $7a + 7b + 6c$.

Упражнение 5. Завершите решение задачи 4, подобрав числа a, b, c так, чтобы выполнялись неравенства $a + b + c > 0$, $7a + 7b + 6c < 0$.

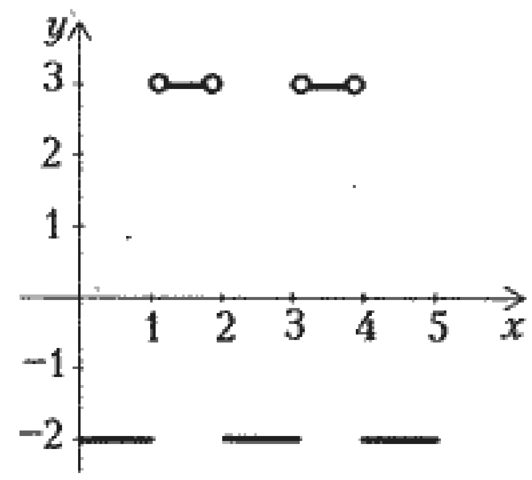

Рис.3

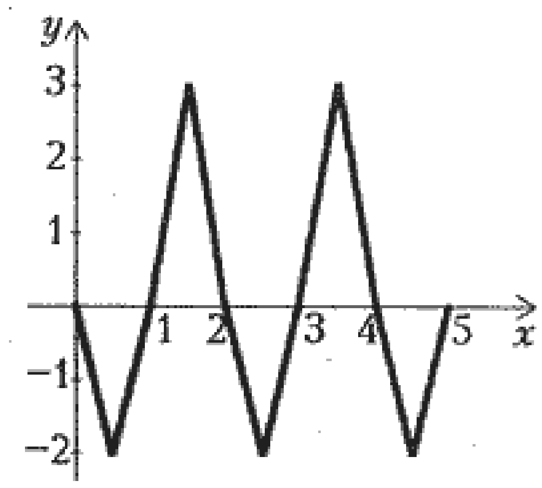

Рис.4

Упражнение 6. Бухгалтер каждый месяц подсчитывал доход и расход предприятия. Мог ли доход за любые 5 подряд идущих месяцев превышать расход, а за весь год, наоборот, оказаться меньше расхода?

Упражнение 7. Пешеход шел 3,5 часа, причем за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/ч?

От сумм вернемся к интегралам. Мы доказали, что для некоторого t выполняется равенство $F(t + 2) = F(t)$. Нельзя ли в условии М1596 вычеркнуть слова «или 3»?

Оказывается, нельзя. Подражая решению задачи 4, рассмотрим функцию, равную −2 при $x \in [0; 1] \cup [2; 3] \cup [4; 5]$ и равную 3 при $x \in (1; 2) \cup (3; 4)$ (рис.3). Ее интеграл по любому отрезку длиной 2 (содержащемуся в [0;5]) равен 1. Впрочем, в М1596 функция должна быть непрерывной.

Задача 5. *Придумайте непрерывную функцию, интеграл от которой по отрезку [0; 5] равен нулю, а интегралы по всем содержащимся в [0; 5] отрезкам длиной 2 положительны.*

Решение. График — на рисунке 4.

В заключение вспомним классическую задачу про функцию на отрезке, о которой рассказывалось в статье И.М.Яглома «О хордах непрерывных кривых» (см. «Квант» №4 за 1977 г.). Мы сформулируем ее так, чтобы была видна тесная связь с задачей М1596:

Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ задана на отрезке [0; 1] и $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Для каких h можно утверждать, что интеграл функции f по некоторому отрезку длиной h равен 0?

В этой задаче замечательный ответ: h должно равняться одному из чисел $1/n$, где n натуральное. Докажите это (и постройте примеры, показывающие, что для других h ответ отрицателен).

В.Произволов, А.Спивак

ПОПРАВКА

В условии задачи М1612 (см. «Квант» №5 за 1997 г.) допущена ошибка: числа расставляются в клетках таблицы 10×10, а не $m \times n$. Приносим извинения нашим читателям.