Рис.1

и отрицательное, обращается в нуль в некоторой точке этого отрезка (теорема о промежуточном значении).

Обе идеи очень важны и часто используются в математическом анализе. Но начнем мы издалека — с задачи, предлагавшейся пятиклассникам на окружном туре Московской олимпиады:

Задача 1. *По кругу лежат 5 монет гербом вниз. Разрешается переворачивать одновременно три монеты, лежащие подряд. Как таким способом положить все монеты гербом вверх?*

Не видите связи? Ничего, скоро все прояснится. А пока переворачивайте монеты. Перевернули? Если не сделали лишних движений, то каждая монета участвовала в трех операциях (рис.1). Продолжим подготовку к решению М1596:

Задача 2. *По кругу записаны 20 чисел. Сумма любых трех последовательно стоящих чисел положительна. Может ли сумма всех 20 чисел быть отрицательной?*

Решение. Сложим все 20 сумм, образованных тройками подряд стоящих чисел. Разделив полученную (положительную!) сумму на 3, получим в точности сумму всех 20 записанных по кругу чисел.

Завершит подготовку задача, в которой уже легче угадать некоторые черты М1596:

Задача 3. *В ряд стоят 30 сапог, 15 из которых левые, 15 — правые. Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.*

Решение. Рассмотрим первые 10 сапог. Если среди них левых и правых поровну, то больше ничего делать не надо. Если не поровну, пусть, для определенности, правых сапог больше.

Для каждых 10 подряд стоящих сапог рассмотрим разность между числом правых и левых сапог. Мы предположили, что для первых 10 сапог эта разность положительна. Разбив ряд из 30 сапог на три отрезка по

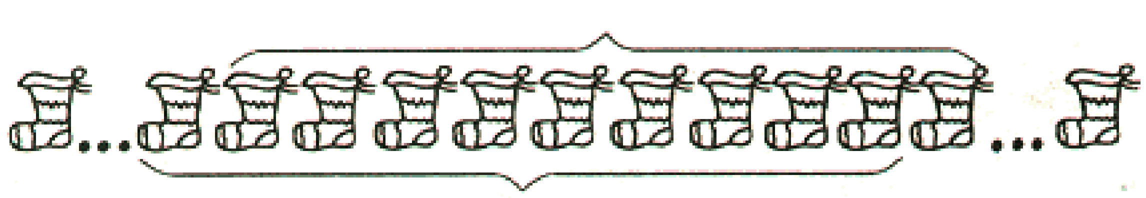

Рис.2

10 сапог в каждом, видим, что все три соответствующие разности не могут быть положительны (иначе всего правых сапог было бы больше, чем левых). Значит, хотя бы одна из разностей неположительна.

Задумаемся, как меняется разность при «сдвиге на один сапог» (рис.2). Поскольку добавляется один сапог и исчезает тоже один, разность или не меняется, или меняется на 2.

Осталось применить нечто вроде теоремы о промежуточном значении.

Упражнение 1. Сделайте это, заметив предварительно, что все рассматриваемые разности четны.

Упражнение 2. Можно ли по кругу расставить 7 целых чисел так, чтобы сумма любых трех соседних равнялась 19?

Упражнение 3. Даны 100 чисел. Известно, что произведение любых 17 из них больше 1. Докажите, что произведение всех 100 чисел больше 1.

Решение задачи М1596

Первый способ. Если бы в олимпиаде участвовали не школьники, а студенты, то они, наверное, рассуждали бы следующим образом. «Согнем» отрезок в окружность длиной 5, склеив его концы. На окружности определим естественным образом функцию f, любым образом выбрав ее значение в «точке склейки» (например, взяв одно из значений функции в склеившихся концах — ведь значение интеграла не меняется при изменении значения функции в одной точке).

Пусть дуга длиной 2 скользит вдоль окружности. Тогда интеграл, вычисленный по этой дуге, непременно зависит от положения дуги. *Если величина интеграла все время одного и того же знака (например, положительна), то того же знака величина* $\int_0^5 f(x)\,dx$, *а она по условию равна 0.*

Если же эта величина меняет знак, то, по теореме о промежуточном значении, в какой-то момент она обратится в 0. При этом рассматриваемая дуга может содержать или не содержать «точку склейки». В первом случае перейдем к дополнению — длина дополнения как раз равна 3. Во втором случае и так все ясно.

Это решение не использует того, что 2 и 3 — целые числа. Следовательно, если на отрезке длиной l задана функция, интеграл от которой по всему отрезку равен нулю, то для любого числа a $(0 < a < l)$ на отрезке найдется отрезочек длиной a или $l - a$, интеграл по которому равен нулю.

Есть в этом решении один недостаток: выделенный курсивом факт очевиден для студента, но не вполне очевиден для школьника. Жюри олимпиады надеялось получить другое решение:

Второй способ. Изменим значение функции f в точке $x = 5$, чтобы оно стало равно ее значению в точке $x = 0$. Продолжим функцию на всю прямую, считая ее периодической с периодом 5. Пусть $F(x) = \int_0^t f(x)\,dx$. Функция F также имеет период 5 (поскольку $F(t+5) - F(t) = \int_t^{t+5} f(x)\,dx = 0$).

Докажем, что для некоторого t выполняется равенство $F(t) = F(t + 2)$. Рассмотрим функцию $g(t) = F(t + 2) - F(t)$. Заметим, что $F(10) = 0$ и $F(0) = 0$. Значит, сложив величины $g(8) = F(10) - F(8)$, $g(6)$, $g(4)$, $g(2)$ и $g(0)$,