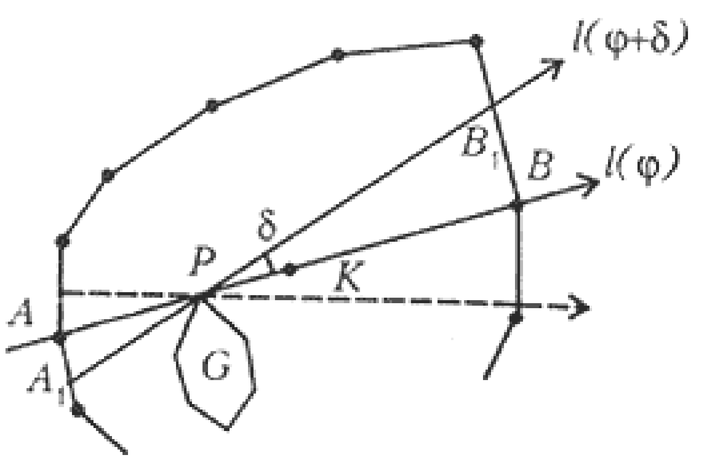


Рис.2

площадей $S(\varphi+\delta)-S(\varphi)$ равна разности площадей треугольников APA_1 и BPB_1 (рис.2). Если $PA < PB$, то (при малом δ) $PA_1 < PB_1$ и площадь треугольника APA_1 меньше площади треугольника BPB_1 (треугольник, симметричный APA_1 относительно P, лежит внутри BPB_1); таким образом, при всех достаточно малых $\delta > 0$ выполнено неравенство $S(\varphi+\delta) < S(\varphi)$. Аналогично, $S(\varphi) < S(\varphi-\varepsilon)$ при достаточно малом ε — прямая $l(\varphi-\varepsilon)$ получается поворотом $l(\varphi)$ вокруг точки $P' \in G(\varphi)$, либо совпадающей с P, либо, во всяком случае, лежащей по ту же сторону от середины K, так что $AP' < BP'$. Итак, если $G(\varphi)$ лежит по одну (на рисунке 2 — левую) сторону от K, то в окрестности φ функция S убывает. Если $G(\varphi)$ расположена по другую сторону от K, то в окрестности φ функция S возрастает.

Однако непрерывная функция $S = S(\varphi)$ (принимающая равные значения на концах отрезка $[0,\ 2\pi]$) должна достигать максимума и минимума. По доказанному выше, в этих точках середина хорды K должна лежать в $G(\varphi)$, т.е. принадлежать границе G.

Н.Васильев

М1605. *Имеются N карточек, на которых написаны различные (неизвестные) числа. Они разложены на столе по кругу числами вниз. Надо найти три какие-нибудь лежащие рядом карточки такие, что число, написанное на средней карточке, больше, чем на каждой из двух соседних. При этом разрешается перевернуть последовательно не более k карточек. Докажите, что это возможно, если а) $N = 5$, $k = 4$; б) $N = 76$, $k = 10$; в) $N = 199$, $k = 12$.*

Решим сначала задачу а). «Откроем» среди 5 чисел, расположенных по окружности, два числа $a < b$, стоящих на расстоянии 2 друг от друга, и еще одно, соседнее с большим из них — c. Из соображений симметрии, можно считать, что $c < b$. Осталось посмотреть d, стоящее между a и b: одна из троек $a,\ d,\ b$ и $d,\ b,\ c$ — искомая.

Хороший алгоритм отыскания нужной тройки среди n чисел, который можно придумать, рассмотрев несколько следующих значений $n = 6,\ 7,\ \ldots$, связан с последовательностью чисел Фибоначчи: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, …, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$. Мы докажем, что найти нужную тройку среди f_k чисел можно за k попыток. Поскольку $f_{10} = 89 > 79$, $f_{12} = 223 > 199$, это даст решения задач б) и в) даже с некоторым запасом. Для этого докажем сначала индукцией по k, что в ряду

$$\underbrace{a,\ldots,b}_{f_k},\underbrace{\ldots,c}_{f_{k-1}} \qquad (*)$$

из $f_k+f_{k-1}+1=f_{k+1}+1$ чисел, где известны числа a, b, c, причем b — наибольшее и находится от a и c на расстояниях f_{k-1} и f_{k-2}, можно найти нужную тройку за $k-1$ попытку. Для $k = 2$ (для ряда из четырех чисел $a,\ b,\ .,\ c$) это очевидно. Пусть вплоть до некоторого значения $k-1$ это доказано. Рассмотрим ряд ($*$) и «откроем» число d, находящееся на расстояниях f_{k-1} от a и f_{k-2} от b:

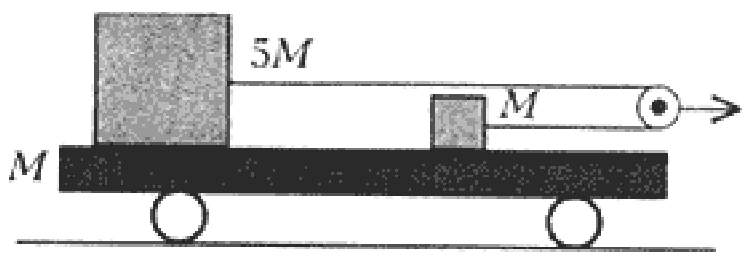
$$\underbrace{a,\ldots,d}_{f_{k-1}},\underbrace{\ldots,b}_{f_{k-2}},\underbrace{\ldots,c}_{f_{k-1}}.$$

Если $d > b$, то мы можем применить предположение индукции к $f_k + 1$ числам $a,\ldots,\ d,\ \ldots,\ b$, а если $d < b$ — то к числам $d,\ \ldots,\ b,\ldots,\ c$: за $k-2$ попытки среди них найдется нужная тройка.

Теперь среди $f_k = f_{k-1} + f_{k-2} = 2f_{k-2} + f_{k-3}$ чисел по окружности достаточно «открыть» два числа $a < b$ на расстоянии f_{k-2} и число c, находящееся на расстояниях f_{k-2} от a и f_{k-3} от b. По соображениям симметрии, можно считать, что $b > c$. По доказанному выше, среди идущих подряд $f_{k-2} + f_{k-3} + 1 = f_{k-1} + 1$ чисел $a,\ldots,b,\ldots$ …, c за $k-3$ попытки можно найти нужную тройку.

В.Протасов, А.Заславский

Ф1613. *На гладком горизонтальном столе находится тележка массой M, на ней два кубика массами 5 M и M, связанных легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок (см. рисунок). Блок тянут постоянной силой в горизонтальном направлении, куски*



нити при этом горизонтальны. Коэффициент трения между поверхностью тележки и кубиками $\mu = 0,1$. При какой величине силы ускорение тележки составит $a = 0,2g$? Какими при этом будут ускорения кубиков и блока?

В решении этой задачи нужен анализ возможности проскальзывания грузов по тележке. Вариант проскальзывания обоих грузов не подходит — ускорение тележки окажется при этом больше указанной в условии величины $0,2g$:

$$a_{\text{т}} = \frac{6Mg\mu}{M} = 6g\mu = 0,6g.$$

Для того чтобы оба груза не проскальзывали, нужен слишком большой коэффициент трения — не менее 0,5. Несложные рассуждения показывают, что малый груз должен по тележке проскальзывать, а большой — ехать вместе с ней.

Обозначим необходимую силу F, тогда натяжения нити, переброшенной через блок, составят $F/2$ — именно эти силы будут действовать на грузы со стороны нити. Пусть ускорение большого груза a_1, малого a_2 и тележки a. Запишем уравнения движения тел:

$$\frac{F}{2} - \mu Mg = Ma_2,$$
$$\frac{F}{2} + \mu Mg = 6Ma,$$
$$a_1 = a.$$