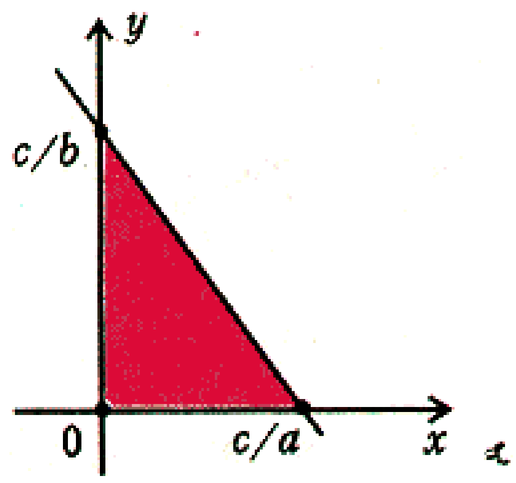

Рис.1

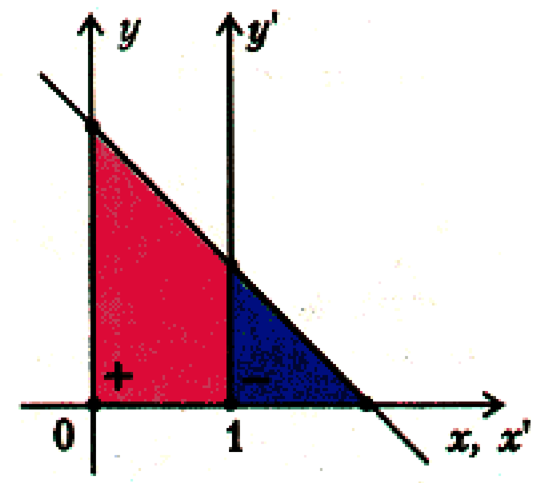

Рис.2

кает оси координат на расстояниях c/a и c/b от начала координат, поэтому площадь общего треугольника равна $c^2/2ab$.

Решив задачу для фигуры с одним прямым углом, решим ее для фигуры с двумя прямыми углами, т.е. для полосы, лежащей в положительном квадранте (рис.2). Для этого надо из треугольника, попавшего в положительный квадрант, вычесть треугольник, попавший в новый положительный квадрант с вершиной в точке $(1; 0)$. Этот новый квадрант задает новую систему координат, в которой все абсциссы точек на единицу меньше.

Уравнение прямой в новой системе координат выглядит так: $a(x'+1) + by' = c$, или $ax' + by' = c - a$. Это уравнение аналогично исходному с той разницей, что $(c - a)$ может быть отрицательным. Следовательно, если $(c - a) > 0$, то площадь треугольника в новом квадранте будет $(c-a)^2/2ab$, а если $(c - a) < 0$, то пересечения нет, и площадь считаем равной нулю. Тогда формулу для площади пересечения полуплоскости с

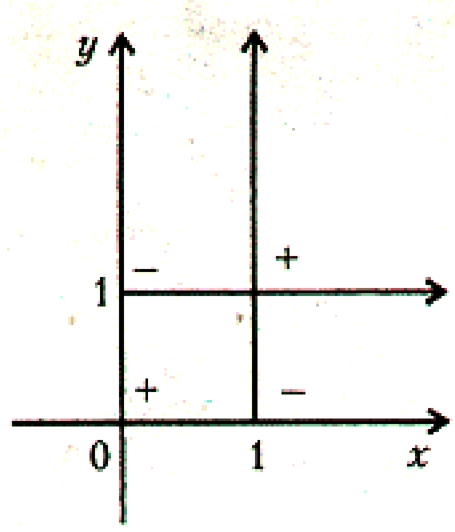

Рис.3

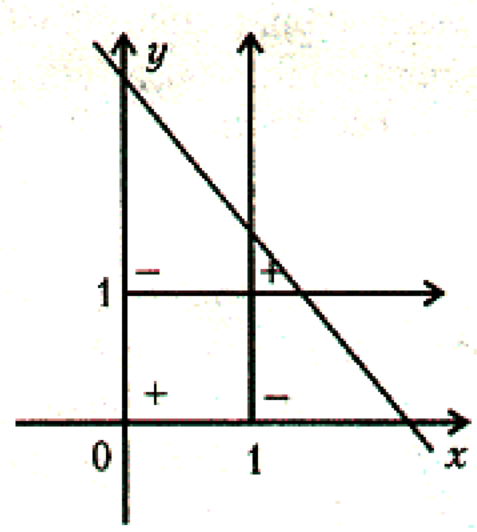

Рис.4

полосой можно записать как $c^2/2ab - (c-a)_+^2/2ab$.

Теперь легко получить выражение для квадрата с помощью четырех положительных квадрантов с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0;1)$, $(1; 0)$ и $(1; 1)$, которые отличаются параллельным переносом (рис.3). Для этого надо из квадранта с вершиной $(0; 0)$ «вычесть» квадрант с вершиной $(1; 0)$, «прибавить» квадрант с вершиной $(1; 1)$ и «вычесть» квадрант с вершиной $(0; 1)$. Обратите внимание: знаки расставлены так, что каждая точка внутри квадрата учтена один раз, а каждая точка вне квадрата — ноль раз. Выражение такого типа называется формулой включения-исключения. Аналогичная формула верна и для пересечения квадрата с полуплоскостью.

Выражая площади соответствующих треугольников (рис.4) в новых системах координат, получаем формулу включения-исключения для площади пересечения полуплоскости с квадратом:

$$\left[c^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right]/2ab.$$

В случае пересечения куба с полупространством надо сначала рассмотреть пересечение полупространства с положительным октантом и найти объем общего тетраэдра. Затем представить куб в виде «суммы» и «разности» восьми положительных октантов с вершинами в вершинах куба. Потом переписать уравнение полупространства в каждой из восьми систем координат $a(x'+p) + b(y'+q) + c(z'+r) \le d$, где $(p; q; r)$ — вектор параллельного переноса исходного октанта. И наконец, написать формулу включения-исключения для объемов тетраэдров в октантах:

$$\left[d^3-(d-a)_+^3-(d-b)_+^3-\right.$$
$$-(d-c)_+^3+(d-a-b)_+^3+(d-b-c)_+^3+$$
$$\left.+(d-c-a)_+^3-(d-a-b-c)_+^3\right]/6abc.$$

А.Канель, А.Ковальджи

М1604. *Внутри выпуклого многоугольника F расположен второй выпуклый многоугольник G. Хорда многоугольника F — отрезок, концы которого лежат на границе F, — называется опорной к многоугольнику G, если она пересекается с G только по границе: содержит либо одну вершину, либо сторону G. Докажите, что а) найдется опорная хорда, середина которой лежит на границе G; б) найдутся по крайней мере две такие хорды.*

Идею решения можно сформулировать одной фразой. Рассмотрим площади сегментов, отрезаемых от F хордами, опорными к G (рис.1), и выберем среди них наибольшую и наименьшую. Соответствующие хорды касаются G своими серединами.

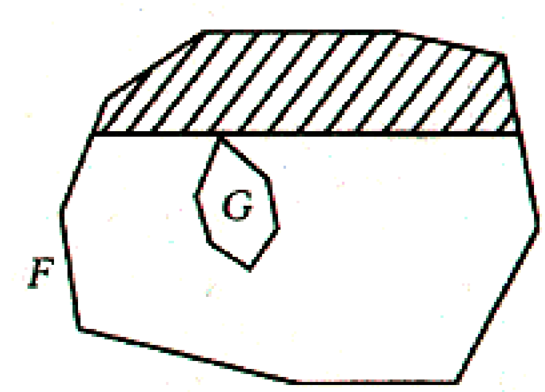

Рис.1

Изложим теперь решение более подробно. Пусть $l(\varphi)$ — опорная к G прямая, составляющая угол φ с некоторым фиксированным направлением l_0. Мы считаем, что $l(\varphi)$ — направленная прямая, G содержится в ее правой полуплоскости; $G(\varphi) = G \cap l(\varphi)$ — одна точка (вершина G) или отрезок (сторона G). Ясно, что для каждого φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, прямая $l(\varphi)$ определена однозначно. Рассмотрим площадь $S = S(\varphi)$ «сегмента», отрезаемого прямой $l(\varphi)$ от F, — пересечения F с левой полуплоскостью этой прямой. Очевидно, что $S = S(\varphi)$ — непрерывная функция от φ на отрезке $0 \le \varphi \le 2\pi$, где $S(2\pi) = S(0)$.

Пусть AB — хорда, высекаемая многоугольником F на прямой $l(\varphi)$, и K — ее середина. Докажем, что если K не лежит на границе G, то в некоторой окрестности φ функция S монотонна (возрастает или убывает). Рассмотрим близкую к $l(\varphi)$ прямую $l(\varphi+\delta)$ и соответствующую хорду A_1B_1. При достаточно малом δ прямая $l(\varphi+\delta)$ получается из $l(\varphi)$ поворотом вокруг некоторой точки $P \in G(\varphi)$, лежащей на границе G, а разность