быстродействующего переключателя конденсатор в этой цепи переключается $n = 100$ раз в секунду то в одной, то в другой полярности (выводы конденсатора все время меняются местами друг с другом); стрелка прибора при этом практически не дрожит. Обычный магнитоэлектрический амперметр показывает в таком случае силу тока $I_1 = 0{,}01$ А. Что покажет в такой цепи амперметр тепловой системы с тем же сопротивлением? Приборы были отградуированы в цепи постоянного тока.

А.Повторов

Ф1637. Катушка индуктивностью $L = 1$ Гн присоединена параллельно конденсатору емкостью $C = 10$ мкФ, последовательно с получившимся контуром включен еще один такой же конденсатор и к получившейся цепи подключен генератор низкой частоты с амплитудой выходного напряжения $U_0 = 1$ В. На какой частоте ток, потребляемый от генератора цепью, получается очень малым? На какой частоте этот ток резко возрастает? Оцените максимальную амплитуду напряжения на катушке, если сопротивление провода ее обмотки $R = 10$ Ом. Остальные элементы цепи считайте идеальными.

А.Повторов

Решения задач М1601 — М1605, Ф1613 — Ф1622

М1601. *Пусть $f(x)$ — нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых чисел a, b и c, сумма $a + b + c$ которых равна 0, выполнено неравенство*

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

Первое решение. При перемене знаков всех трех чисел a, b и c выражение

$$F = f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a)$$

не меняется (поскольку функция f нечетна); F не меняется и при перестановке a, b, c. Поэтому можно считать, что $c\le 0$, $a\ge 0$, $b\ge 0$. Поскольку $c=-a-b$ и функция f нечетна, условие $F\le 0$ можно переписать так:

$$f(a)f(b)\le -f(c)\big(f(a)+f(b)\big)=f(a+b)f(a)+f(a+b)f(b).$$

Для монотонной функции f и неотрицательных a, b это неравенство очевидно.

Второе решение, более «симметричное». Будем считать, что $c\le 0$, $a\ge b\ge 0$, тогда $|c|=|a+b|$ и $|f(c)|\ge|f(a)+f(b)+f(c)|$, поскольку $f(b)\ge f(a)\ge 0$, $f(c)<0$. Отсюда

$$|f(c)|^2\ge f^2(a)+f^2(b)+f(c)^2+2\big(f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\big).$$

Поскольку $f^2(a)+f^2(b)$ — число неотрицательное,

$$f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a)\le 0.$$

В.Произволов, Н.Васильев

М1602. *1997 фишек расположены на плоскости в вершинах выпуклого 1997-угольника. За один ход можно разбить их на две группы и фишки первой группы сдвинуть на какой-нибудь вектор, а остальные фишки — оставить на месте. Может ли случиться, что после а) 9; б) 10 ходов все фишки окажутся на одной прямой?*

Ответы: а) нет; б) да.

а) Пусть $2^n<N$. На каждой прямой лежит не более двух вершин выпуклого N-угольника (фишек). После первого хода на каждой прямой может оказаться не более четырех фишек, после второго — не более 8, после $(n-1)$-го — не более 2^n. Таким образом, собраться на одной прямой фишки могут не менее чем через n ходов. При $N = 1997 > 1024$ можно взять $n = 10$.

б) Построить пример можно так. Пусть $N\le 2^{n+1}$ (в частности, для $N = 1997$ можно взять $n = 10$). Проведем 2^n равноотстоящих параллельных прямых и расположим на них фишки в вершинах произвольного выпуклого N-угольника, как показано на рисунке 1. Сдвинув все фишки, лежащие на левой половине прямых на вектор $\vec{v}$ так, чтобы эти прямые совпали соответственно с прямыми правой половины (рис. 2), мы соберем все фишки на 2^{n-1} прямых, а через n аналогичных шагов все они соберутся на одной прямой.

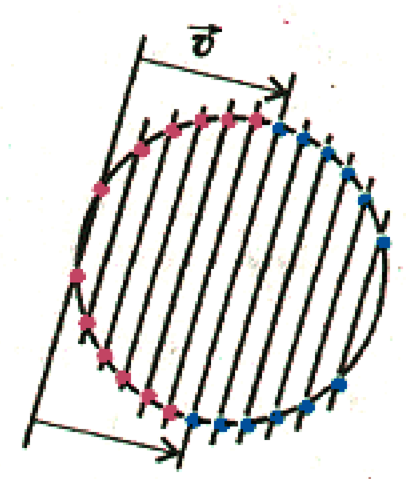

Рис.1

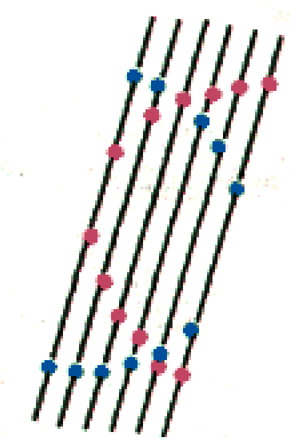
Рис.2

М.Евдокимов

М1603. *а) Фигура M на плоскости Oxy представляет собой пересечение единичного квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ с полуплоскостью $ax+by\le c$ (a, b и c — положительные числа). Докажите, что площадь M вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{2ab}\left((c)_+^2-(c-a)_+^2-(c-b)_+^2+(c-a-b)_+^2\right),$$

где $(x)_+$ означает наибольшее из чисел x и 0: $(x)_+ = \max\{x,0\}$. б) Выведите аналогичную формулу для объема многогранника M в пространстве $Oxyz$, представляющего собой пересечение единичного куба $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$ с полупространством $ax+by+cz\le d$ (a, b c и d — положительные числа).

Заметим, что выражение $(c-b)_+^2$ (и аналогичные) в условии означает число, равное $(c-b)^2$, если $c-b\ge 0$, и 0, если $c-b<0$.

Покажем сначала идею решения, а потом ее оформим. У квадрата четыре угла — это очень много. Давайте рассмотрим фигуру с одними углом — положительный квадрант ($x>0$, $y>0$).

Полуплоскость $ax+by<c$ содержит все точки ниже прямой $ax+by=c$. Общая часть полуплоскости и квадранта (рис.1) — это треугольник. Прямая пересе-