Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1621» или «Ф1628». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1625 — М1630 предлагались на XXXVIII Международной математической олимпиаде. Задачи Ф1628 — Ф1637 предлагались на Соровской олимпиаде по физике 1997/98 учебного года.

Задачи М1621 — М1630, Ф1628 — Ф1637

М1621. а) В треугольнике заданы две стороны b и c. Какой должна быть третья сторона a, чтобы точки касания ее со вписанной и вневписанной (касающейся третьей стороны и продолжений сторон b и c) окружностями делили сторону a на три равные части?
б) Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий условиям пункта а)?

М1622. Пусть K — множество натуральных чисел, представимых в виде суммы различных чисел вида $2^m - 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$: $K = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок натурального ряда от 1 до N. Каких чисел на этом отрезке больше — принадлежащих множеству K или остальных, если а) $N = 1000$; б) N — произвольное натуральное число?

Б.Кукушкин

М1623. Один из углов треугольника равен 60°. Обозначим через H точку пересечения высот, через O и I — центры описанной и вписанной окружностей этого треугольника.
а) Докажите, что $OI = IH$.
б)* Следует ли из последнего равенства, что один из углов треугольника равен 60°?

А.Савин

М1624. Внутри вписанного в окружность выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась отличная от центра окружности точка P, из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков A_1P, A_2P, …, A_nP быть рациональными числами? Разберите случаи:
а) $n = 4$; б) $n = 8$; в)* $n = 6$;
г) $n = 5$ и $n = 7$; д)* $n > 8$.

М.Панов

М1625. Плоскость разбита на единичные квадраты, вершины которых находятся в точках с целочисленными координатами. Квадраты раскрашены поочередно в черный и белый цвета (т.е. в шахматном порядке). Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматривается прямоугольный треугольник с вершинами в целочисленных точках, катеты которого имеют длины m и n и проходят по сторонам квадратов. Пусть S_1 — площадь черной части треугольника, а S_2 — площадь его белой части. Положим

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Вычислите $f(m, n)$ для всех натуральных чисел m и n, которые либо оба четны, либо оба нечетны.
б) Докажите, что $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ для всех m и n.
в) Покажите, что не существует константы C такой, что $f(m, n) < C$ для всех m и n.

(Белоруссия)

М1626. В треугольнике ABC угол A является наименьшим. Точки B и C делят окружность, описанную около этого треугольника, на две дуги. Пусть U — внутренняя точка той дуги с концами B и C, которая не содержит точку A. Срединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают прямую AU в точках V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в точке T. Докажите, что

$$AU = TB + TC.$$

(Великобритания)