этого с помощью упражнений 19 и 7 легко следует, что при $n < 105$ все коэффициенты полиномов Φ_n равны 0 или ± 1 (поскольку $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, любое $n < 105$ имеет не более двух нечетных простых делителей).

В 1941 году В.Иванов доказал эти факты и вычислил:

$$\Phi_{105}(x) = x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{26} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} - x^{9} - x^{8} - 2x^{7} - x^{6} - x^{5} + x^{2} + x + 1.$$

Среди коэффициентов этого многочлена деления круга есть -2.

Упражнение 34. При каких n в разложении многочлена $f_n(x) = x^{n-1} + \ldots + x + 1$ на неприводимые множители все коэффициенты всех многочленов-сомножителей неотрицательны?

Подсказка. Если $n = p^\alpha$, то все коэффициенты многочлена $\Phi_{p^\alpha} = f_p\left(x^{p^{\alpha-1}}\right)$ неотрицательны. Если же n делится на различные простые числа p и q, то $x^n - 1$ делится на Φ_{pq}, среди коэффициентов которого есть отрицательные (например, коэффициент при первой степени x полинома Φ_{pq} равен, как легко посчитать, -1).

Упражнение 35. При каких натуральных a и b многочлен $f_a\left(x^b\right)$ неприводим?

* * *

Мы говорили, что многочлены разлагаются на множители «так же, как числа». Ниже сформулированы некоторые факты, придающие этим словам точный математический смысл.

• Многочлены можно делить с остатком: для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x) \neq 0$ с рациональными коэффициентами существуют (и определены единственным образом!) такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \qquad (8)$$

где степень многочлена r меньше степени многочлена g или $r = 0$. (Равенство (8) можно записать и в виде $\dfrac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)}$.)

• Для любых двух ненулевых многочленов $A(x)$ и $B(x)$ многочлен (отличный от нуля) минимальной степени, представимый в виде

$$A(x) \cdot K(x) + B(x) \cdot L(x),$$

где K и L — многочлены, является наибольшим общим делителем многочленов A и B.

Упражнение 36. Любой многочлен, имеющий общий корень с неприводимым полиномом, делится на этот полином.

• *(Основная теорема арифметики для многочленов)* Любой многочлен с рациональными коэффициентами единственным способом разлагается в произведение неразложимых многочленов с рациональными коэффициентами.

• *(Лемма Гаусса)* Если многочлен с целыми коэффициентами разложим на множители с рациональными коэффициентами, то он разложим и на множители с целыми коэффициентами.

Упражнение 37. а) Если многочлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень x и если старший коэффициент этого многочлена равен 1, то x — целое число.

б) Если многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень p/q, где дробь p/q записана в несократимом виде (т.е. НОД$(p,q)=1$), то числитель p — делитель свободного члена a_0, а знаменатель q — делитель старшего коэффициента a_n.

* * *

Мы пользовались неразложимостью некоторых многочленов. Объясним напоследок, как можно «кустарно», т.е. не используя общую теорию, доказать неразложимость Φ_{15}, Φ_{20} и Φ_{60}.

Упражнение 38. Если $f_n(x)$ разложен в произведение многочленов с вещественными коэффициентами, то каждый из множителей-многочленов возрастает на луче $[1,+\infty)$.

Указание. Все сомножители $x^2 - 2x\cos\varphi + 1$ разложения (4) возрастают при $x \geq 1$.

Упражнение 39. Докажите непосредственно, т.е. не пользуясь формулой (2), неразложимость многочлена $\Phi_{15}(x) = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$ на множители с целыми коэффициентами.

Из неразложимости Φ_{15} сразу следует неразложимость многочлена $\Phi_{30}(x) = \Phi_{15}(-x)$. Поскольку $\Phi_{20}(x) = \Phi_{10}(x^2)$ и $\Phi_{60}(x) = \Phi_{30}(x^2)$, то для доказательства неприводимости Φ_{20} и Φ_{60} можно использовать неприводимость Φ_{10} и Φ_{30}. К сожалению, мы не можем попросту сказать, что если многочлен $f(x)$ неприводим, то и $f(x^2)$ неприводим (контрпримеры: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$, $x^6 - 4 = (x^3 - 2)(x^3 + 2)$).

Упражнение 40. Докажите, что если $f(x)$ неприводим, то $f(x^2)$ или неприводим, или разлагается на неприводимые множители следующим образом: $f(x^2) = \pm P(x)P(-x)$ (выясните, в каком случае какой знак).

Упражнение 41. Докажите непосредственно, т.е. не пользуясь формулой (2), неразложимость многочленов а) $\Phi_{20}(x) = (x^{10} + 1)/(x^2 + 1)$; б) $\Phi_{60}(x) = (x^{20} - x^{10} + 1)/(x^4 - x^2 + 1)$ на множители с целыми коэффициентами.

НАМ ПИШУТ

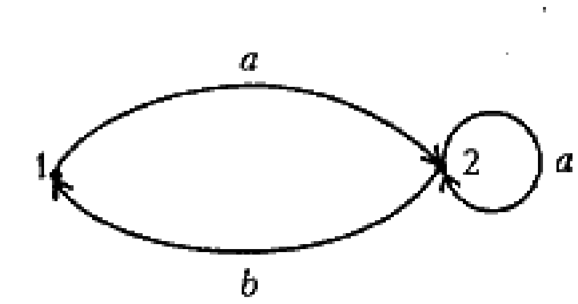
ГЕНЕРАТОР СЛОВ И ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

В 1992 году я предложил на лингвистической олимпиаде следующую задачу:

«С помощью схемы, изображенной на рисунке, строятся слова некоторого искусственного языка. Слова получаются движением из точки 1 в направлении стрелок и записью букв, написанных около проходимых стрелок. Слово может заканчиваться как в точке 1, так и в точке 2.

Таким образом может быть получено лишь одно слово длиной 1 — «*a*», два слова длиной 2 — «*aa*» и «*ab*», три слова длиной 3, пять слов длиной 4 и т.д.

Обозначим через $N(n)$ число слов длиной n. Докажите, что $N(n)$ делится на 5 тогда и только тогда, когда $n+1$ делится на 5».



Решение этой задачи основано на свойстве чисел $N(n)$: $N(0) = N(1) = 1$, $N(n+1) = N(n) + N(n-1)$. Но именно этими условиями определяется последовательность Фибоначчи! Значит, числа $N(n)$ являются n-ми числами ряда Фибоначчи.

Таким образом, получен еще один механизм возникновения чисел ряда Фибоначчи.

А.Серебряный