**Доказательство леммы 2.** Предположив противное, обозначим через $i$ наименьший из таких номеров, что хотя бы одно из чисел $a_i$, $b_i$ отлично от 0 и 1. Пусть, для определенности, $a_i$ не равно ни 0, ни 1. По лемме 1 имеем $a_{m-i} = a_i$. Значит, $a_{m-i} > 0$.

Если $b_i > 0$, то коэффициент при $x^m$ после раскрытия скобок произведения $g(x)h(x)$ получается больше 1 (сообразите, почему!). Если же $b_i = 0$, то первое слагаемое выражения $a_ib_0 + a_{i-1}b_1 + \ldots + a_0b_i = 1$ не равно ни 0, ни 1, а каждое из остальных слагаемых равно 0 или 1.

**Третий способ**

Этот способ не использует комплексных чисел. Оказывается, верны следующие леммы.

**Лемма 1'.** *Если возвратный многочлен $f(x)$ разложен в произведение многочленов $g(x)$ и $h(x)$ с неотрицательными коэффициентами, причем все коэффициенты многочлена $f$ не превосходят величины его свободного члена, то полиномы $g$ и $h$ — тоже возвратные. (Разумеется, мы считаем, что многочлен $f$ отличен от тождественного нуля.)*

**Лемма 2'.** *Если возвратный многочлен $f(x)$, все коэффициенты которого суть 0 и 1, разложен в произведение полиномов $g(x)$ и $h(x)$ с неотрицательными коэффициентами, то и все коэффициенты многочленов $g(x)$, $h(x)$ равны 0 или 1.*

Они сильнее, чем леммы 1 и 2, поэтому вывод теоремы 1 из лемм остается прежним. Доказательство леммы 2' по сути не отличается от доказательства леммы 2, поэтому нам осталось только доказать лемму 1'.

Как обычно, можно считать, что $a_0 = b_0 = b_n = a_m = 1$. Пусть хотя бы один из полиномов $g$, $h$ не является возвратным. Рассмотрим *наименьшее* $i$, для которого хотя бы одно из равенств $a_i = a_{m-i}$, $b_i = b_{n-i}$ не выполнено.

Коэффициент при $x^i$ произведения вычисляется по формуле

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \ldots + a_ib_0. \tag{5}$$

Он должен равняться коэффициенту при $x^{m+n-i}$, т.е. сумме

$$a_{m-i}b_n + \ldots + a_mb_{n-i}. \tag{6}$$

Поскольку при всех $j < i$ выполнены равенства $a_j = a_{m-j}$, $b_j = b_{n-j}$, в суммах (5) и (6) все слагаемые, кроме крайних, совпадают. Значит,

$$a_0b_i + a_ib_0 = a_{m-i}b_n + a_mb_{n-i},$$

т.е. $b_i + a_i = a_{m-i} + b_{n-i}$.

Осталось решить два упражнения.

**Упражнение 23.** Докажите, что $b_ia_{m-i} = 0$ и $a_ib_{n-i} = 0$.

*Указание.* Рассмотрите, соответственно, коэффициенты при $x^m$ и $x^n$.

**Упражнение 24.** Завершите доказательство леммы 1'.

## Разложения $f_n$ при составном $n$

Перейдем теперь к описанию разложений с неотрицательными коэффициентами полиномов $f_n(x)$, где $n$ — *произвольное* натуральное число.

**Упражнение 25.** Завершите разложения

а) $f_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(\ldots)$;

б) $f_6(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(\ldots)$;

в) $f_{15}(x) = (x^2 + x + 1)(\ldots)$.

**Упражнение 26.** Докажите, что при любом составном $n = ab$ полином $f_n(x)$ представим в виде $f_{ab}(x) = f_a(x)f_b(x^a)$.

**Упражнение 27.** Если $n = abc$ — некоторое разложение в произведение натуральных чисел, то

$$f_n(x) = f_a(x)f_b(x^a)f_c(x^{ab}). \tag{7}$$

Аналогичное разложение можно выписать, если число $n$ разложено не на два или три, а на большее число множителей. Более того, никаких других разложений полиномов $f_n(x)$ на множители с неотрицательными коэффициентами, по существу, не бывает (см. теорему 2). Ключ к доказательству этого — задача М1598. Мы сейчас изложим ее решение.

а) При доказательстве лемм 1 и 2 простота $p$ не использовалась. Поэтому можно считать, что коэффициенты $a_i$ и $b_i$ равны только 0 или 1.

б) Теперь — сюрприз. М1598,б) — это геометрическая задача. Понять ее условие и решение проще всего, если рисовать отрезки и смотреть, что происходит при сдвигах.

В самом деле, давайте изображать многочлен $x^\alpha + x^\beta + \ldots$ системой отрезков $[\alpha, \alpha+1] \cup [\beta, \beta+1] \cup \ldots$ Умножение на $x^t$ будем представлять как параллельный перенос на $t$ единиц. Тогда, например, разложению

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{11} = (1 + x + x^6 + x^7)(1 + x^2 + x^4)$$

будет соответствовать система отрезков $[0,2] \cup [6,8]$, сдвиги которой на 0, 2 и 4 единицы покрывают в точности отрезок $[0,12]$ (рис.4). (Один множитель задает систему отрезков, другой — величины сдвигов. Не удивляйтесь их неравноправию. Скоро все станет ясно.)

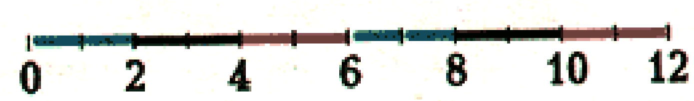

*Рис. 4*

Итак, для геометра задача М1598 может быть сформулирована следующим образом:

*На отрезке задана некоторая система $S$ не пересекающихся друг с другом отрезочков. Докажите, что если отрезок можно составить из параллельных сдвигов системы $S$, то длины всех отрезочков системы $S$ одинаковы. (Отрезочки не имеют никаких общих точек, в частности, не имеют общих концов. При параллельных сдвигах все точки большого отрезка должны быть покрыты; отрезочки не должны накладываться друг на друга внутренними точками, а должны «стыковаться» в концах.)*

Решение очень простое. Можно считать, что все сдвиги выполняются только направо. (Если есть и сдвиги налево, то возьмем наибольший из них. Вместо системы $S$ можно рассматривать этот ее сдвиг.)

Рассмотрим самый левый отрезочек. Очевидно, среди сдвигов должен быть сдвиг на длину $k$ этого отрезочка. Из этого следует, что длины всех отрезочков системы не превосходят $k$ (иначе длинный отрезочек накладывался бы на себя при сдвиге).

Если же среди отрезочков системы найдется отрезочек, длина которого меньше $k$, рассмотрим самый левый из всех таких отрезочков. Противоречие очевидно.