Интереснейшее свойство комплексных чисел — то, что закон умножения можно просто записать не только в алгебраической форме:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi =$$
$$= (ac - bd) + i(ad + bc),$$

но и в тригонометрической:

$$r(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot R(\cos\beta + i\sin\beta) =$$
$$= rR(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)),$$

так что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент равен сумме аргументов (как водится, с точностью до 360°).

Теперь, пользуясь тригонометрической формой, легко записать операцию возведения в степень:

$$(r\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Последняя формула называется *формулой Муавра*. Из нее следует, что все решения уравнения $x^n = 1$ имеют модуль, равный 1, а их аргументы удовлетворяют условию $n\alpha = 360°k$, где k — целое число. Следовательно, корни степени n из 1 — это в точности числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где $k = 1, \ldots, n$. Они являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса.

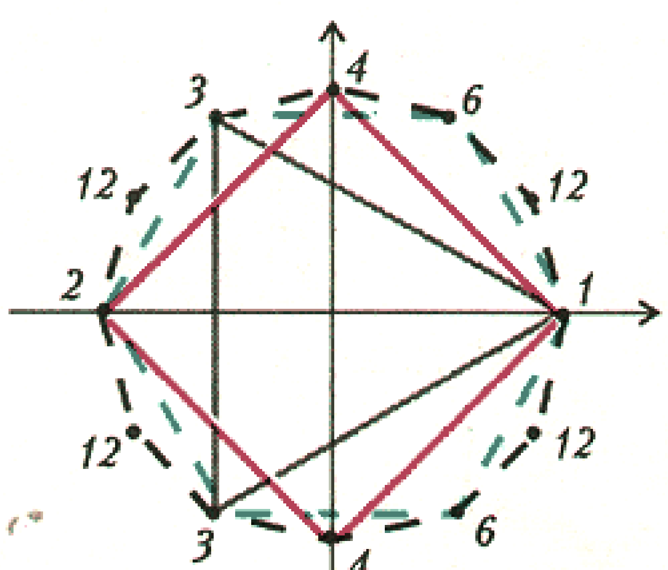

Рис. 3

Заметим, что корни n-й степени из единицы, т.е. решения уравнения $x^n = 1$, заодно являются и корнями mn-й степени: $x^{mn} = 1$. Например, всякий корень 3-й степени является и корнем 12-й степени. Поэтому естественно ввести следующее определение: корень называется *первообразным степени n*, если он не удовлетворяет никакому уравнению $x^k = 1$ при натуральном $k < n$. (Например, 1 — единственный первообразный корень степени 1, −1 — первообразный корень степени 2, $-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$ — первообразные корни степени 3.)

Упражнение 10. а) Для правильного 12-угольника, вписанного в единичную окружность, на рисунке 3 отмечено, первообразными корнями какой степени являются его вершины. На заставке (с.10) буквы расположены в вершинах 24-угольника. Определите, какие буквы первообразным корням какой степени соответствуют.

б) Нарисуйте часы и расставьте около 60 минутных делений числа, показывающие, первообразными корнями какой степени являются соответствующие корни 60-й степени из 1.

в) Как по натуральным числам k и n узнать, корнем какой наименьшей степени является число $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$?

Внимательному читателю уже ясно, что корни многочлена Φ_n — это в точности первообразные корни n-й степени из 1. Другими словами, корни многочлена Φ_n — это числа вида $\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где k — взаимно простое с n число, $1 \le k \le n$. Таким образом, степень многочлена Φ_n действительно равна $\varphi(n)$.

Упражнение 11. Какой остаток дает x^{100} при делении на $x^2 + x + 1$?

Упражнение 12. а) Разложите на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^5 + x + 1$.

б) Делится ли $x^{11} + x^7 + 1$ на $x^2 + x + 1$?

в) Докажите, что если натуральные числа m и n не делятся на 3 и их разность $m - n$ не делится на 3, то многочлен $x^m + x^n + 1$ делится на $x^2 + x + 1$.

г) При каких n число

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}1\underbrace{0\ldots0}_{n}1$$

делится на 37?

Подсказка. $37\cdot 3 = 111 = 10^2 + 10 + 1$.

Упражнение 13. а) Убедитесь, что если модуль числа x равен 1, а аргумент равен α, т. е. если $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, то $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$.

б) Верно ли, что если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то модуль числа x равен 1, а аргумент равен α?

Упражнение 14. Вычислите а) $\cos 72°$; б) $\sin 72°$.

Упражнение 15. Докажите, что если $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$, то $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha$.

Упражнение 16*. При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ делится на а) $x^2 + x + 1$; б) $x^2 - x + 1$; в) $x^4 - x^2 + 1$; г) $x^4 + x^2 + 1$?

Упражнение 17*. При каких n многочлен $x^{2n} - x^n + 1$ делится на а) $x^2 + x + 1$; б) $x^2 - x + 1$; в) $x^4 - x^2 + 1$; г) $x^4 + x^2 + 1$?

Упражнение 18. Проверьте, что $\Phi_{60}(x) = \Phi_{15}(-x^2)$. Вообще, $\Phi_{4n}(x) = \Phi_n(-x^2)$ при нечетных $n > 1$.

Упражнение 19*. Докажите формулы а) $\Phi_{p^\alpha}(x) = \Phi_p\left(x^{p^{\alpha-1}}\right)$, где p — простое число, α — натуральное число;

б) $\Phi_{p^\alpha q^\beta r^\gamma}(x) = \Phi_{pqr}\left(x^{p^{\alpha-1}q^{\beta-1}r^{\gamma-1}}\right)$, где α, β, γ — натуральные числа, p, q, r — различные простые числа.

Разложения с вещественными коэффициентами

Имея формулу

$$x^n - 1 = \prod_{k=1}^{n}\left(x - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),$$

легко разложить $x^n - 1$ на множители с вещественными коэффициентами.

Ясно, что любой множитель-многочлен с вещественными коэффициентами, имеющий некоторый комплексный корень $a + bi$, имеет и сопряженный корень $a - bi$. Значит, мы должны «объединить» сопряженные множители.

При нечетном n на вещественной оси лежит лишь один корень n-й степени из единицы (а именно, само число