Упражнение 9. Разложите на множители а) $x^4 + x^2 + 1$; б) $f_p\left(x^2\right) = x^{2p-2} + x^{2p-4} + \ldots + x^2 + 1$, где p — простое число.

Разложения с комплексными коэффициентами

...Всякое объяснение неизвестно откуда начинать, оно же тянется от дальних-дальних азов. Вот сейчас из-под лавки вылезет пещерный человек и попросит объяснить ему за пять минут, как электричеством ходят поезда. Ну как ему объяснить? Сперва вообще пойди научись грамоте. Потом — арифметике, алгебре, черчению, электротехнике... Чему там еще?

— Ну, не знаю... магнетизму...

— Вот, и ты не знаешь; а на последнем курсе! А потом, мол, приходи, через пятнадцать лет, я тебе все за пять минут и объясню, да ты и сам уже будешь знать.

А.И.Солженицын. «В круге первом»

Чтобы понять, как устроены многочлены Φ_n и почему их степень есть функция Эйлера, потребуется, как это ни странно для новичка, разлагать $x^n - 1$ на множители с комплексными коэффициентами.

Тем, кто не знаком с комплексными числами, достаточно пока знать, что операции над ними выполняются по обычным правилам алгебры, к которым добавлено только одно дополнительное правило: $i^2 = -1$. (Подробности — в статье Ю.Соловьева «Комплексные числа» в Приложении к журналу «Квант» №2 за 1994 год.) Комплексное число $a + bi$, где a и b — «обычные» (т.е. более привычные) вещественные числа, изображается точкой (a,b) координатной плоскости (рис. 1).

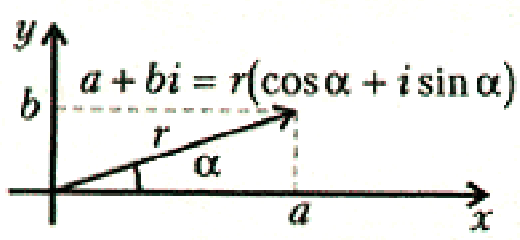

Рис. 1

Приведем несколько примеров.

$\boldsymbol{n = 3}$. Уравнение $x^3 - 1 = 0$ имеет корень $x = 1$ и еще два комплексных корня, которые легко найти, решив по обычной формуле квадратное уравнение $x^2 + x + 1 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Итак,

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Числа 1, $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ — вершины правильного треугольника (рис. 2,*а*).

$\boldsymbol{n = 4}$, $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$. Числа 1, i, -1, $-i$ — вершины квадрата (рис. 2,*б*).

Отложим на время случай $n = 5$ и разберем более простой (ибо само число составное) случай

$\boldsymbol{n = 6}$. Очевидно, $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1) \times (x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$, так что

$$x^6 - 1 = (x-1)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times$$
$$\times (x+1)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right).$$

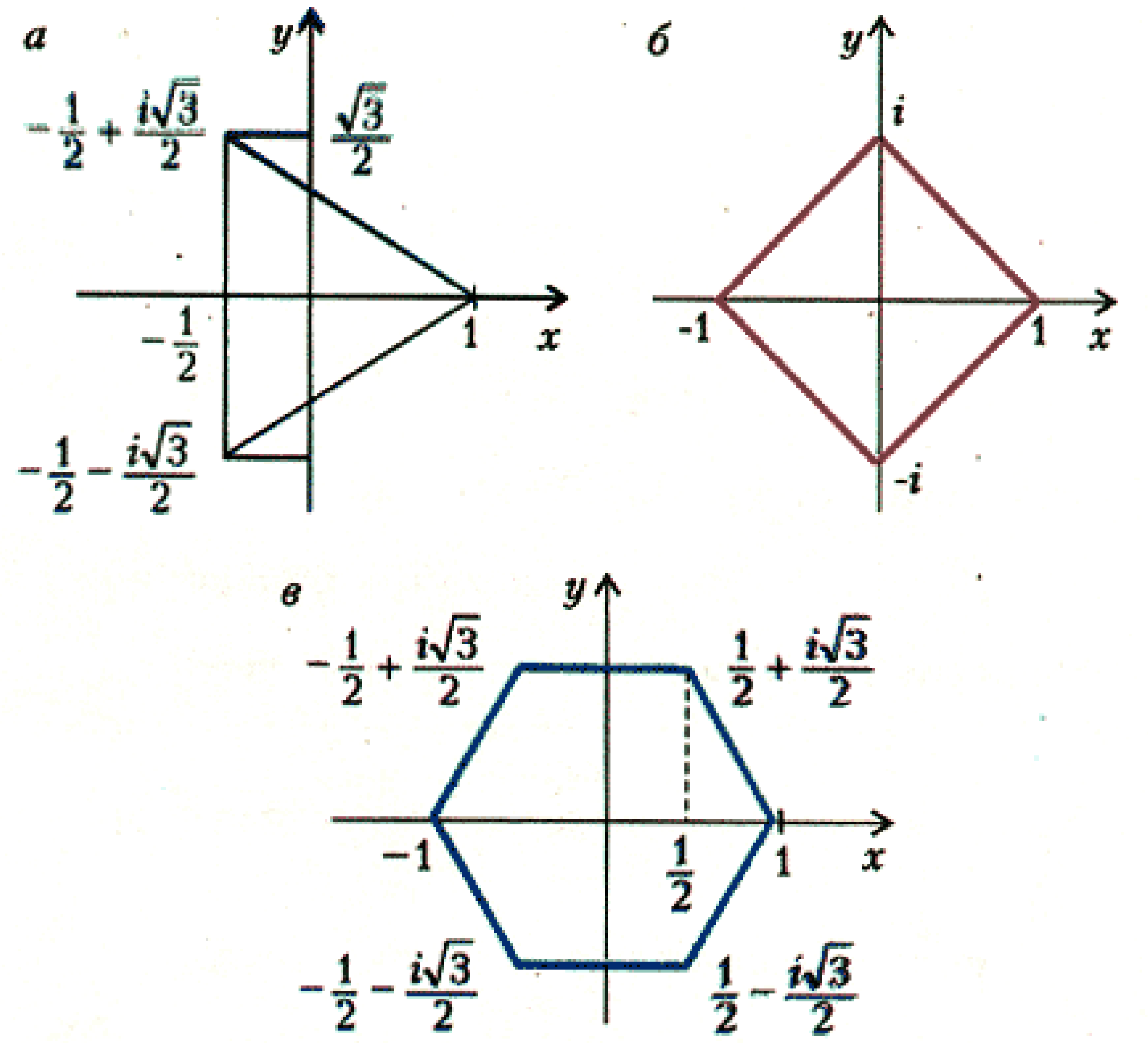

Рис. 2

Числа 1, $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, -1, $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ — вершины правильного шестиугольника (рис. 2,*в*). Это, как мы установили, корни шестой степени из единицы.

Теперь рассмотрим случай $\boldsymbol{n = 5}$. Чтобы решить уравнение

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

разделим на x^2 и сгруппируем:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} + 1 = 0,$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

Сделав замену $x + \frac{1}{x} = y$, получим квадратное уравнение $y^2 + y - 1 = 0$, откуда $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Осталось решить уравнения $x + \frac{1}{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Это легко сделать, но получаются громоздкие ответы. И по ним не очевидно, что полученные корни (вместе с числом 1) делят единичную окружность на 5 равных частей.

Оказывается, гораздо проще воспользоваться тригонометрической формой записи комплексных чисел: точку (a,b) (отличную от начала координат) представим в виде

$$a + bi = r\cos\alpha + ir\sin\alpha, \qquad (3)$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — расстояние от начала координат до точки (a,b) (так называемый *модуль* числа $a + bi$), а угол α (*аргумент* числа $a + bi$) — угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом, выходящим из начала координат и проходящим через точку (a,b) (углы, как обычно, отсчитываем против часовой стрелки). Возможность представления (3) вытекает из определений синуса и косинуса.