Упражнение 3. Проверьте неразложимость многочленов $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ и $\Phi_9(x) = x^6 + x^3 + 1$.

Указание. Можно рассуждать как при $n = 5$, т.е. применять так называемый метод неопределенных коэффициентов, а можно использовать признак Эйзенштейна.

Упражнение 4. Разложите на неприводимые множители многочлены $x^n - 1$ при $n = 10, \ldots, 14$.

Заметьте, что для каждого из изученных значений n многочлен $x^n - 1$ разлагается на неприводимые множители, только один из которых ни разу не встречался в разложениях многочленов $x^m - 1$ при $m < n$. Именно этот множитель следует обозначить через Φ_n.

$\boldsymbol{n = 15}$. Применим формулу для разности кубов:

$$x^{15} - 1 = \left(x^5 - 1\right)\left(x^{10} + x^5 + 1\right) = \\ = (x-1)\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)\left(x^{10} + x^5 + 1\right).$$

С другой стороны, как разность пятых степеней,

$$x^{15} - 1 = \left(x^3 - 1\right)\left(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1\right) = \\ = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1\right).$$

Мы получили два разложения на множители. Как «объединить» их в одно? Оказывается, $x^{10} + x^5 + 1$ делится на $x^2 + x + 1$. Поделим в столбик:

$$\begin{array}{r|l}
x^{10} + x^5 + 1 & x^2 + x + 1 \\ \hline
-\;x^{10} + x^9 + x^8 & x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 \\
-x^9 - x^8 + x^5 + 1 & \\
-\;-x^9 - x^8 - x^7 & \\
x^7 + x^5 + 1 & \\
-\;x^7 + x^6 + x^5 & \\
-x^6 + 1 & \\
-\;-x^6 - x^5 - x^4 & \\
x^5 + x^4 + 1 & \\
-\;x^5 + x^4 + x^3 & \\
-x^3 + 1 & \\
-\;-x^3 - x^2 - x & \\
x^2 + x + 1 & \\
-\;x^2 + x + 1 & \\
0 &
\end{array}$$

и получим

$$x^{15} - 1 = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right)\times \\ \times\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)\left(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1\right).$$

Замечание. Неразложимость последнего множителя не очевидна. Она доказана в *Приложении*. Там же показано, почему неприводимы полиномы Φ_{20} и Φ_{60}, которые вскоре потребуются нам. Но при первом чтении лучше об этом не задумываться.

Общий закон вполне очевиден из таблицы, в которой под каждым из исследованных значений n выписано, на сколько неразложимых множителей можно разложить многочлен $x^n - 1$. Множителей оказывается в точности столько, сколько делителей у числа n.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\tau(n)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4

Проверим этот закон для $\boldsymbol{n = 60}$. Число 60 имеет 12 делителей. Значит, мы должны разложить $x^{60} - 1$ на 12 множителей с целыми коэффициентами. Начнем:

$$x^{60} - 1 = \left(x^{30} - 1\right)\left(x^{30} + 1\right) = \\ = \left(x^{15} - 1\right)\left(x^{15} + 1\right)\left(x^{10} + 1\right)\left(x^{20} - x^{10} + 1\right).$$

Упражнение 5. Завершите это разложение, представив $x^{60} - 1$ в виде произведения 12 многочленов с целыми коэффициентами: Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5, Φ_6, Φ_{10}, Φ_{12}, Φ_{15}, Φ_{20}, Φ_{30}, Φ_{60}.

В учебниках арифметики и алгебры доказывается, что всякий многочлен с целыми коэффициентами единственным с точностью до порядка сомножителей образом разлагается в произведение неприводимых многочленов с целыми коэффициентами. (Ситуация здесь такая же, как и для чисел: как известно, натуральные числа единственным с точностью до порядка сомножителей образом разлагаются в произведение простых чисел.) Для многочлена $x^n - 1$ разложение на неприводимые множители таково:

$$x^n - 1 = \prod_{n \vdots k} \Phi_k(x), \qquad (2)$$

где произведение берется по всем делителям k числа n (знак $\vdots$ читается «делится нацело»). Доказательство, к сожалению, далеко выходит за рамки школьной программы.

Но все-таки в следующем разделе мы объясним, почему степень многочлена Φ_n деления круга равна $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — *функция Эйлера.* (Функция Эйлера, по определению, — это количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с числом n.)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8

Покажем, как можно использовать формулу (2) для нахождения Φ_n. Например, чтобы посчитать Φ_{81}, выпишем два разложения:

$$x^{81} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x)\Phi_9(x)\Phi_{27}(x)\Phi_{81}(x),$$

$$x^{27} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x)\Phi_9(x)\Phi_{27}(x).$$

Поделив одно на другое, получим

$$\Phi_{81}(x) = \left(x^{81} - 1\right)/\left(x^{27} - 1\right) = x^{54} + x^{27} + 1.$$

Таким же образом доказывается общая формула $\Phi_{p^\alpha}(x) = \left(x^{p^\alpha} - 1\right)/\left(x^{p^{\alpha-1}} - 1\right)$, где p — простое число, α — натуральное.

Упражнение 6. а) Докажите равенство $\Phi_{pq}(x) = \left(\left(x^{pq} - 1\right)(x-1)\right)/\left(\left(x^p - 1\right)\left(x^q - 1\right)\right)$, где p, q — различные простые числа.

б) Выведите аналогичную формулу для Φ_{pqr}, где p, q, r — различные простые числа.

Упражнение 7. а) Выпишите $\Phi_{2p}(x)$, где $p > 2$ — простое число.

б)* Докажите равенство $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$ при любом нечетном $n > 1$.

Упражнение 8. Докажите, что если p — нечетное простое число, то $\Phi_{4p}(x) = f_p\left(-x^2\right)$.