Многочлены деления круга

В. СЕНДЕРОВ, А. СПИВАК

ИЗВЕСТНЫ формулы сокращенного умножения

$$x^2-1=(x-1)(x+1),$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1),$$
$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

Раскрыв скобки, легко проверить и общую формулу

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1), \qquad (1)$$

которая изучается в школе как формула суммы геометрической прогрессии.

Мы расскажем о разложениях на множители многочленов вида x^n-1. Оказывается, они тесно связаны с задачей о делении окружности на n равных частей. Именно изучение этих многочленов позволило К.Ф.Гауссу в 1796 году решить задачу о том, при каких n правильный n-угольник может быть построен циркулем и линейкой. (Например, можно построить правильный 17-угольник и даже 65537-угольник. Подробно это объяснено в статье А.Кириллова в «Кванте» №6 за 1994 год и в книге С.Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» — Библиотечка «Квант», вып. 14.) Не обойтись без них и в теории Галуа, позволяющей по алгебраическому уравнению сказать, решается оно в радикалах или нет. Важнейшие объекты алгебры и арифметики — *корни из единицы, функция Эйлера* $\varphi(n)$ и функция $\tau(n)$ (количество натуральных делителей числа n) — встретятся нам на первых же шагах изучения многочленов деления круга.

* * *

На Московской олимпиаде 1997 года девятиклассники решали задачу, вошедшую в «Задачник «Кванта»:

М1598. *Пусть $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=F(x)G(x)$, $n>1$, $F(x)$ и $G(x)$ — многочлены с неотрицательными коэффициентами.*

а) Докажите, что все коэффициенты этих многочленов — нули и единицы.

б) Докажите, что один из многочленов $F(x)$, $G(x)$ представим в виде $(1+x+\ldots+x^{k-1})T(x)$, где $k>1$, а коэффициенты полинома $T(x)$ — нули и единицы.

Точнее говоря, на олимпиаде было предложено решить пункт б) для многочленов F и G, коэффициенты которых суть нули и единицы. Решил задачу только один школьник, а большинство из остальных 509 участвовавших в олимпиаде девятиклассников вообще не поняли, о чем речь. Дело в том, что М1598 — лишь частичка теории разложений многочленов $f_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}$ на множители. Поэтому она выглядит естественной (и красивой, и не очень трудной!) лишь для того, кто интересовался этими разложениями.

Рассказать обо всем сразу невозможно. Начнем с примеров. Они вполне доступны семикласснику, изучившему формулы сокращенного умножения (особенно если он не станет задумываться над вопросами неприводимости [1]).

Разложения с целыми коэффициентами

Когда не знаешь, что именно делаешь,
делай это особенно тщательно.

Правило для лаборантов

Начнем копить «экспериментальный материал». Не ленитесь выписывать разложения и решать упражнения — только в этом случае вы всё поймете и правильно оцените.

$n=2$, $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Обозначим $\Phi_1(x)=x-1$, $\Phi_2(x)=x+1$.

$n=3$, $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$. Обозначим $\Phi_3(x)=x^2+x+1$. Многочлен Φ_3 нельзя разложить на множители с целыми коэффициентами.

Упражнение 1. Докажите это.

$n=4$, $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Обозначим $\Phi_4(x)=x^2+1$.

$n=5$, $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$. Обозначим $\Phi_5=x^4+x^3+x^2+x+1$. Неразложимость многочлена Φ_5 на множители с целыми коэффициентами уже не вполне очевидна. Можно рассуждать, например, так. Делителей первой степени нет, поскольку в противном случае многочлен Φ_5 имел бы рациональный корень, который заодно был бы корнем многочлена x^5-1, т.е. должен был бы равняться числу 1. Значит, надо привести к противоречию возможность разложения вида

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f).$$

Разумеется, $ad=1$ и $cf=1$. Следовательно, коэффициенты a, c, d, f могут равняться лишь ±1.

Упражнение 2. Доведите рассуждение до конца.

$n=6$, $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+1)(x^2-x+1)$. Как и раньше, возник один новый неприводимый делитель $\Phi_6(x)=x^2-x+1$.

$n=7$, $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$. Второй множитель, как обычно, обозначим Φ_7. Неразложимость многочлена Φ_7, как и любого многочлена $f_p(x)=x^{p-1}+\ldots+x+1$, где p — простое число, можно установить при помощи признака Эйзенштейна (формулировка и доказательство — в *Приложении*).

$n=8$, $x^8-1=(x^4-1)(x^4+1)=(x-1)(x+1)\times(x^2+1)(x^4+1)$.

$n=9$, $x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)\times(x^6+x^3+1)$.

[1] Слова *неразложимый* и *неприводимый* — синонимы, как и слова *многочлен* и *полином*.

Иллюстрация П. Чернуского