отрезке большой (порядка $\sqrt{n}$) длины и будет пологим и симметричным (рис.3). При переходе к дробным долям (т.е. при «наматывании оси l на окружность $l \bmod 1$») из такого распределения на оси l получится почти равномерное (при больших n) распреде-

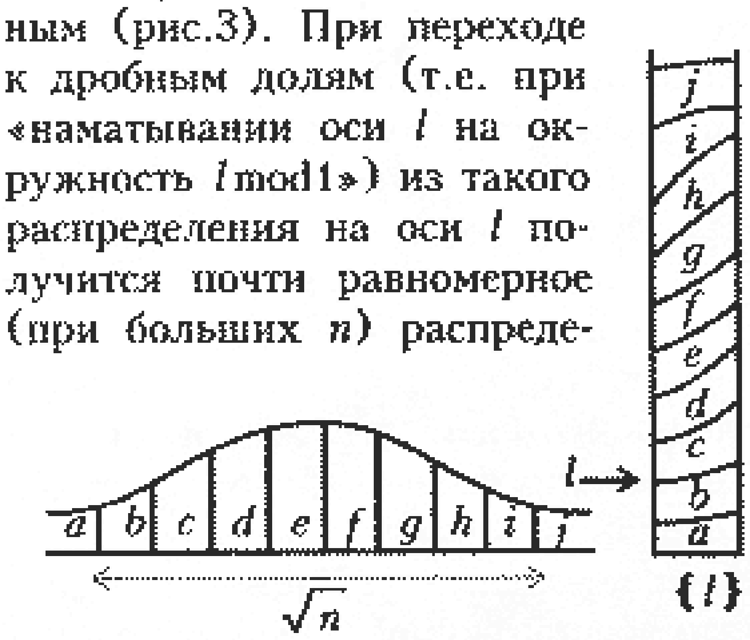

Рис.3. При наматывании прямой с пологим распределением на окружность на ней получается почти равномерное распределение

ление на окружности (детали обоснования предоставляются читателю; важно, что последовательность дробных долей чисел $m \lg 2$ распределена равномерно).

Имеется множество более сложных моделей передела мира, приводящих в численных экспериментах к такому же эффекту. Вероятно, для целых классов таких моделей можно строго доказать предельную равномерность распределения дробных долей логарифмов площадей стран. Вот несколько примеров.

1. В начальный момент имеется k стран площадей $S_1, \ldots, S_k$. В каждый последующий момент одна (случайно выбираемая) страна с вероятностью 50% делится, а с вероятностью 50% объединяется с какой-либо (случайно выбранной) страной. Разумеется, выборы, делаемые в разные моменты времени, считаются независимыми и все случайно выбираемые страны равновероятны.

По вычислениям М.В.Хесиной (университет Торонто, июнь 1997) при $S_i = i$, $k = 100$ распределение первых цифр площадей стран становится практически таким же, как приведенное выше распределение первых цифр степеней двойки, уже через сотню шагов.

2. Введение деления на неравные части с каким-либо законом распределения частей (например, равномерным) приводит к такому же результату.

3. В моделях, где разрешается объединяться лишь с соседями, устанавливается такое же распределение первых цифр. Например, в одной из моделей Ф.Аикарди (Триест, июнь 1997) страны представлялись дугами

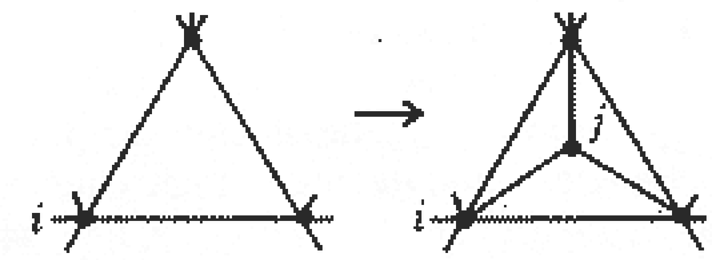

Рис.4. Отделение новой страны j от страны i

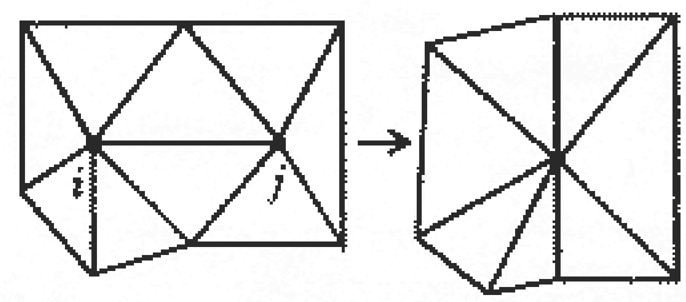

Рис.5. Слияние стран j и i

окружности, а площади — длинами этих дуг. Распределение, практически неотличимое от распределения первых цифр степеней двойки, наступает очень быстро.

4. В другой модели Аикарди мир представляется графом, задающим разбиение сферы на треугольники (n вершин которых представляют n стран и снабжены «площадями», распределенными на интервале $(1, n)$ по закону случая). Граф строится, начиная с икосаэдра, при помощи итераций такой операции: случайно выбирается треугольная грань, добавляется вершина в ее центре и соединяется со всеми тремя вершинами грани.

Передел мира в этой модели организован так: в каждый момент $(1, \ldots, T)$ выбирается случайно вершина i и затем с вероятностью p число стран увеличивается на 1 и с вероятностью $1 - p$ уменьшается на 1. В первом случае случайно выбирается треугольная грань, содержащая эту вершину i, и вставляется новая вершина в центр грани. Затем эта вершина соединяется со всеми тремя вершинами грани и соответствующая вновь созданная страна получает от страны i долю α ее площади (рис.4).

Во втором случае случайно выбирается соседняя с i вершина j и затем страны i и j объединяются (причем на графе исчезает ребро ij и две разделенные им треугольные грани; рис.5).

В трех экспериментах A, B, C были выбраны следующие значения параметров (табл. 3).

Средние (по 50 повторениям эксперимента с разными начальными условиями) значения долей единиц, ..., девяток среди первых цифр площадей стран оказались такими (табл. 4; в последней строке (D) указаны частоты первых цифр степеней двойки).

Было бы интересно не только доказать общую теорему, указывающую область применимости равномерного распределения дробных долей логарифмов, но и проверить, подчиняются ли этому распределению, например, размеры компаний и их доходы.

Появление странного распределения первых цифр во многих различных ситуациях неоднократно обсуждалось в литературе. Однако я нигде не встречал каких-либо математических теорем или гипотез (подобных приведенным в настоящей статье), обосновывающих неизбежность появления этого распределения (исключая, разумеется, теорему Вейля).

Таблица 3

	A	B	C
начальное число стран, n	100	62	100
число итераций, T	200	150	200
среднее число стран в момент T	98	114	98
вероятность деления, p	0,5	0,6	0,5
отделяемая доля, α	0,5	0,5	0,3

Таблица 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,297	0,183	0,123	0,107	0,073	0,058	0,065	0,046	0,049
B	0,309	0,180	0,123	0,106	0,297	0,059	0,058	0,050	0,045
C	0,294	0,181	0,111	0,091	0,297	0,077	0,059	0,052	0,048
D	0,301	0,176	0,125	0,096	0,297	0,067	0,058	0,051	0,046