Разбиения, ГС-перестановки и деревья

Н.ВАСИЛЬЕВ, Л.КОГАНОВ

Школьники, серьезно интересующиеся математикой, участвующие в олимпиадах и готовые размышлять над сложными задачами, должны быть знакомы с элементами комбинаторики, одним из наиболее интенсивно развивающихся разделов математики.

Хотя те несколько задач, которые мы ниже разбираем, не требуют предварительного изучения основ комбинаторики, мы очень советуем тем, кто встречается с комбинаторными задачами впервые, открыть учебник для физико-математических классов Н.Я.Виленкина, О.С.Ивашева-Мусатова, С.И.Шварцбурда «Алгебра и математический анализ», во второй части которого содержатся начальные сведения по комбинаторике, или замечательную книгу Н.Я.Виленкина «Комбинаторика», где на множестве разнообразных примеров объяснены характерные постановки задач и приемы рассуждений, которые встретятся в этой статье.

Начнем с формулировок трех задач, как мы скоро увидим, тесно связанных друг с другом. Вторая из них возникла в работе одного из самых известных современных специалистов по комбинаторике (автора ряда фундаментальных работ и очень хорошей книги «Перечислительная комбинаторика») Ричарда Стенли.

Формулировки задач

Задача о разбиениях на пары. Сколько существует разбиений множества из $2n$ элементов $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ на пары? (Порядок элементов внутри каждой пары, а также порядок самих пар не принимаются во внимание.)

Представив наши $2n$ элементов точками $1, 2, \ldots, 2n$ числовой прямой, мы можем изобразить каждое такое разбиение n полуокружностями, каждая из которых оканчивается в двух

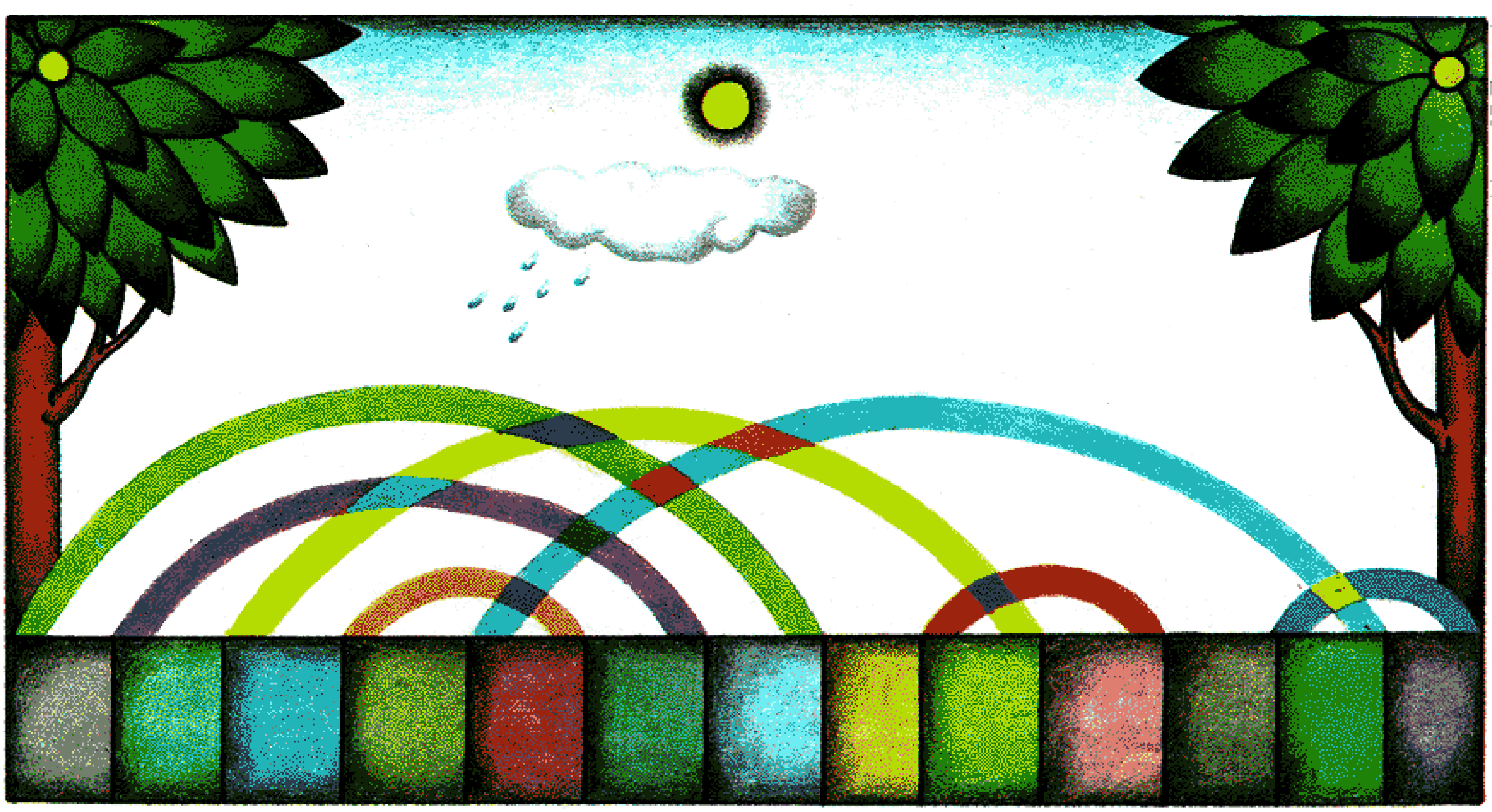


Иллюстрация М.Константиновой

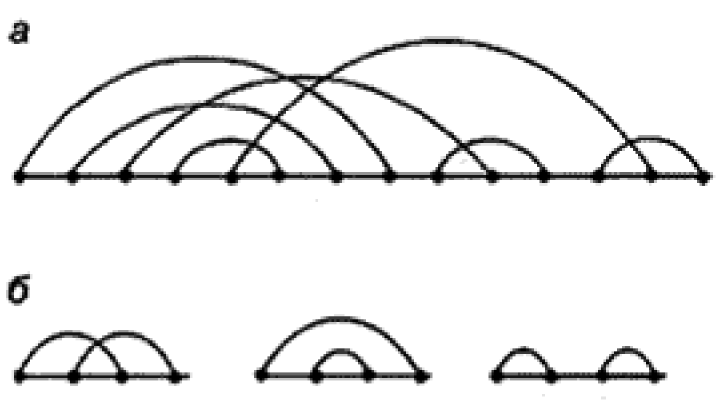


Рис. 1

точках пары (рис.1,*а*). Например, для $n = 2$ существует 3 различных разбиения множества {1, 2, 3, 4} на пары (рис.1,*б*).

Задача о ГС-перестановках. Сколько существует перестановок из $2n$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$ (каждое i от 1 до n входит в перестановку два раза!), удовлетворяющих следующему дополнительному *условию Гесселя — Стенли*: для любого $i < n$ все элементы, расположенные в перестановке между двумя вхождениями i, больше i?

Такие перестановки (мы будем называть их ГС-перестановками) рассматривались в статье, которую опубликовали в 1978 году два американских математика — Айра Гессель и Ричард Стенли. Каждую ГС-перестановку можно изобразить так. Расставим $2n$ точек на горизонтальной прямой, нарисуем в нижней полуплоскости n полуокружностей с концами в этих точках, *не пересекающихся* между собой (даже не имеющих общих концов) и расставим номера 1, 2, ..., n на полуокружностях так, чтобы полуокружность, лежащая выше другой, имела больший номер; например, рисунок 2,*а* изображает ГС-перестановку 13446631255772 — концы i-й полуокружности указывают, где расположены два вхождения элемента i в перестановку.

На рисунке 2,*б* изображены все 3 возможные ГС-перестановки для $n = 2$.

Задача о монотонных плоских корневых деревьях. В теории графов (граф — это система точек — *вершин*, — некоторые пары которых

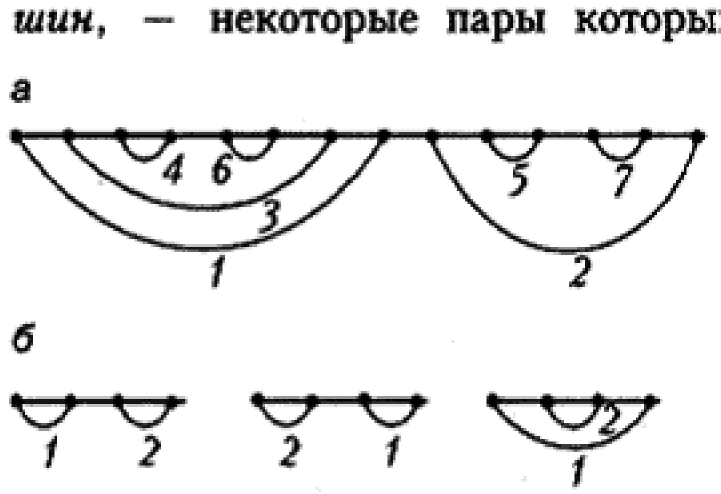


Рис. 2

соединены отрезками — *ребрами* графа) *деревом* называется связный граф без *циклов*, т.е. граф, в котором для любых двух вершин есть только один путь, ведущий из одной в другую по (разным) ребрам. Мы будем рисовать деревья, растущие вверх из *корня* — некоторой точки O горизонтальной прямой l — и состоящие из n ребер — стрелок: одно или несколько ребер начинаются в точке O; из их концов, удаляясь от прямой l, могут расти еще несколько ребер, и так далее. Ребра занумерованы числами от 1 до n, причем *монотонно*: ребра, растущие из вершины, где заканчивается ребро i, должны иметь номера, большие i. При этом длины и направления ребер не принимаются во внимание, но если из какой-то вершины выходит несколько ребер, то важен порядок, в котором они расположены на плоскости (какое — левее, а какое — правее). Сколько существует различных монотонных плоских деревьев с n ребрами? Одно такое дерево изображено на рисунке

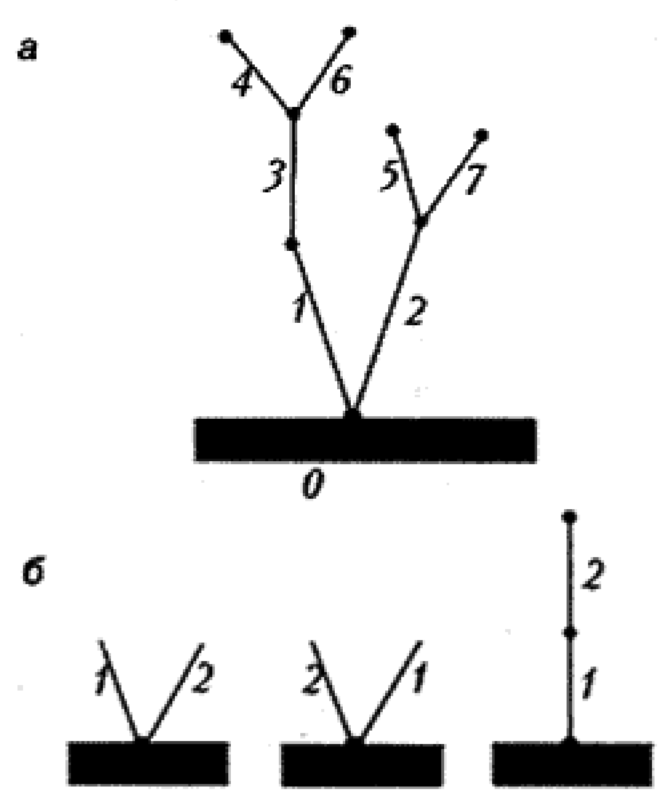


Рис. 3

3,*а*. А на рисунке 3,*б* изображены все 3 различные дерева для $n = 2$.

Замечательно, что во всех трех этих столь разных на вид задачах один и тот же ответ — не только для $n = 2$, но и для любого n.

Разберем их по порядку.

Число разбиений

Напомним сначала две основные формулы комбинаторики.

Общее число различных перестановок из n элементов $\{1, 2, \dots, n\}$ равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1)$$

Это легко доказывается по индукции, например, так. Представим себе перестановку из $n - 1$ элементов как $n - 1$ точек на прямой, обозначенных в некотором порядке 1, 2, ..., $n - 1$. Эти точки делят прямую на n частей: луч слева от самой левой точки, отрезок между ней и соседней точкой, ..., луч слева от самой правой точки. Новую точку n можно поместить в каждую из этих частей. Таким образом, при переходе от $n - 1$ к n число перестановок увеличивается в n раз. Отсюда получается формула (1).

Число C_n^k различных подмножеств множества $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящих из k элементов, равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2)$$

(при этом считается, что $0! = 1$). Эту формулу легко получить из (1), пользуясь тем, что в подмножестве (в отличие от перестановок) порядок расположения элементов не принимается во внимание. Рассмотрим любую из $n!$ перестановок элементов $\{1, 2, \dots, n\}$ и условимся считать, что первые k элементов мы включаем в подмножество, а последние $(n - k)$ — нет. Тогда каждое определенное подмножество будет получаться из $k!\,(n - k)!$ перестановок: ведь в ней первые k элементов можно переставить $k!$ способами и, независимо от этого, последние $(n - k)$ элементов — $(n - k)!$ способами (тут используется основное в комбинаторике «правило произведения»). Поэтому общее число перестановок $n!$ равно $C_n^k k!(n-k)!$, откуда получается формула (2). Заметим, что в ней можно провести сокращения и записать ее так:

$$C_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k! =$$

$$= n(n-1)\ldots(k+1)/(n-k)!$$

Точно такими же рассуждениями решается и задача о числе разбиений множества из $2n$ элементов на n (неупорядоченных) пар. Сопоставим каждой перестановке $(i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_{2n-1}, i_{2n})$ из $2n$ элементов $(1, 2, \dots, n)$ такое разбиение на пары: (i_1, i_2), (i_3, i_4), ..., (i_{2n-1}, i_{2n}). Тогда каждое разбиение будет получаться из $2^n n!$ перестановок: ведь в каждой паре можно (двумя способами) переставить элементы друг с другом — это дает множитель 2^n — и, кроме того, n пар можно переставить как угодно между собой. Итак, ответ:

число разбиений равно

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1).$$

Это число обозначается $(2n-1)!!$ (читается: «$2n-1$ двойной факториал»; вы, конечно, знаете, что $n!$ читается «n факториал»). Как мы и обещали, оно встретится нам еще не раз.

Задача о ГС-перестановках

Здесь, так же как и для обычных перестановок, формула для числа $P_{\text{ГС}}(n)$ перестановок Гесселя – Стенли легко выводится с помощью индукции. Заметим, что, как следует из ГС-условия, пара элементов n, n в перестановке из $2n$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ должна стоять рядом. Представим перестановку (ГС-перестановку!) из $2n-2$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1\}$ как $2n-2$ точек прямой, делящих ее на $2n-1$ частей (два луча и $2n-3$ отрезка). В любую из этих частей мы можем поместить рядом пару (n, n) и получить $2n-1$ разных ГС-перестановок. Таким образом, при переходе от $n-1$ к n число ГС-перестановок увеличивается в $(2n-1)$ раз. Отсюда по индукции получаем

$$P_{\text{ГС}}(n) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = (2n-1)!!$$

Конечно, вполне естественно было бы здесь обсудить такой вопрос:

сколько вообще существует различных перестановок — не обязательно удовлетворяющих ГС-условию — «мультимножества» $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ из $2n$ элементов?

(Слово «мультимножество» означает, что некоторые элементы встречаются более одного раза — в отличие от обычного множества, где элементы считаются различными.)

Эту задачу — несложную — предлагаем решить читателям.

Мы приведем ответ на более общий вопрос: перестановок мультимножества $\{1, 1, \ldots, 1; 2, 2, \ldots, 2; \ldots; n, n, \ldots, n\}$, в котором i встречается k_i раз (в старой терминологии — *перестановок с повторениями*) существует

$$(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!/(k_1!k_2!\ldots k_n!).$$

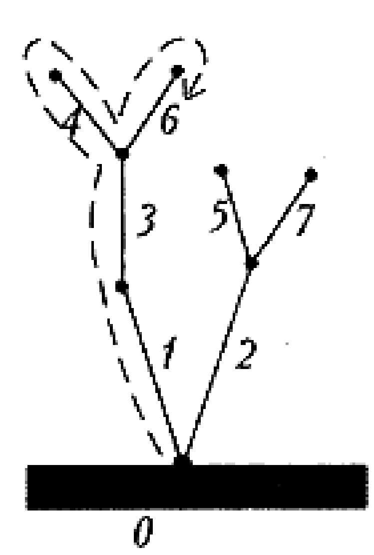
Задача о монотонных плоских деревьях

Эту задачу тоже можно решить по индукции (подумайте, в какое количество мест можно вставить последнюю n-ю ветку дерева). Но мы для разнообразия поступим иначе. Мы докажем, что число таких деревьев с n ветками равно $(2n-1)!!$, установив взаимно однозначное соответствие между ними и ГС-перестановками мультимножества $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$. Аналогичное 1-1-соответствие (или, пользуясь французским термином, *биекция*) было, по-видимому, впервые предложено в 1967 году голландским математиком Николасом Говертом де Брейном и его соавтором Б.Морсельтом для иных целей.

Представим себе, что n ветвей занумерованного плоского дерева D с корнем O — это каналы (или — притоки реки, впадающей в озеро O). Пройдем от точки O, начав, скажем, с левого берега, вдоль всех каналов и вернемся в O, записывая последовательно номера всех встречавшихся нам каналов (рис.4). Каждый номер встретится дважды. При этом, если нумерация монотонна, то полученная перестановка мультимножества $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$, очевидно, будет удовлетворять ГС-условию (весь путь от того момента, когда мы прошли по левому берегу i-го канала, до того, как пришли к его правому берегу, проходит по каналам с номерами, большими i).

Обратно, по любой ГС-перестановке номеров $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ строится соответствующее монотонное плоское дерево с n ветвями: можно представить себе, что номера перестановки написаны в $2n$ клетках на полоске бумаги, которую мы кладем «ребром» на плоскость, сгибаем сначала в тех местах, где рядом стоят равные номера (в частности, пара (n, n)) и постепенно склеиваем все клетки с равными номерами.

Итак, в задаче о деревьях ответ тот же: $(2n-1)!!$ Но если совпадение ответов во второй и третьей задачах мы объяснили, то с первой это совпадение выглядит достаточно случайным. Так ли это — обсудим в следующем разделе.



1 3 4 4 6 6 3 1 2 5 5 7 7 2

↓

код:
12, 5, 8, 3, 2, 1, 1

Рис. 4

Универсальная биекция

Слово «биекция» нам уже встречалось — это точный математический термин, означающий взаимно однозначное соответствие между двумя множествами X и Y, т.е. отображение X на Y, при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $y \in Y$. Разумеется, между любыми двумя конечными множествами X и Y с одинаковым числом элементов N можно установить какую-либо биекцию.

Упражнение. Докажите, что это можно сделать $N!$ способами.

Но когда речь идет о сложных комбинаторных объектах, *какая-то* биеция не слишком интересна. Замечательно, если правило, устанавливающее соответствие, достаточно простое, позволяющее по данному $x \in X$ сразу найти соответствующее ему $y \in Y$ и обратно, по y найти x. Это и есть (не совсем строго математическое) свойство, которое мы подразумеваем, говоря об универсальной биекции.

Приведем пример.

Каждому подмножеству множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно сопоставить его «код» — строчку длины n из цифр 0 или 1 (на i-м месте стоит 1, если i входит в подмножество, и 0 — если нет). Это — хорошо известная универсальная биекция. Она позволяет даже занумеровать все 2^n подмножеств: ведь «код» — строчку из 0 и 1 — можно рассматривать как двоичную запись числа от 0 до 2^{n-1}.

Вернемся теперь к задаче 1. Мы покажем, что в этой задаче — как и в задаче 2 — можно построить естественную биекцию с множеством наборов $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$, где α_i принимает $2i-1$ значений 1, 2, …

..., $2i-1$ (для каждого i от 1 до n; нам удобнее нумеровать α_i не слева направо, как принято обычно, а в обратном порядке, как в языке иврит). В этом нам помогут *диаграммы связей* — полуокружности, с помощью которых мы иллюстрировали формулировки задач.

Итак, пусть у нас есть $2n$ элементов — точек по горизонтальной прямой — и заодно их разбиение на пары (см. рис.1,*а*; удобно на каждой полуокружности поставить стрелку, идущую справа налево). Рассмотрим самый правый элемент и найдем номер $\alpha_n \le 2n-1$ того элемента, с которым он составляет пару (мы считаем, что элементы занумерованы по порядку слева направо: 1, 2, ..., $2n-1$). Уберем эту пару. Останется $2n-2$ элемента. Рассмотрим самый правый из них; остальные (пропустив, если нужно, «бывший» α_n) занумеруем по порядку: 1, 2, ..., $2n-3$ и найдем номер $\alpha_{n-1} \le 2n-3$ элемента, к которому идет полуокружность от самого правого. Удалим и эту пару, и так далее. Так получается набор (α_n, α_{n-1}, ..., α_1), по которому, очевидно, однозначно восстанавливается разбиение на пары.

То же множество наборов (α_n, α_{n-1}, ..., α_1) еще проще сопоставить ГС-перестановкам: по существу, это и делалось в индуктивном решении задачи. Чтобы выбрать место для пары (n, n) в перестановке номеров {1, 1, 2, 2, ..., $n-1$, $n-1$}, стоящих возле $2n-2$ точек прямой, мы выбираем один из $2n-1$ лучей и интервалов, на которые эти точки делят прямую. Можно занумеровать эти интервалы слева направо: 1, 2, ..., $2n-1$ и найти номер α_n соответствующего интервала. В оставшейся ГС-перестановке из $2n-2$ элементов точно так же выбирается (после выбрасывания пары (n, n)) номер α_{n-1}, задающий место для пары ($n-1$, $n-1$), и так далее (см. «код» на рис. 4).

Ясно, что по «коду» (α_n, α_{n-1}, ..., α_1) мы легко строим и ГС-перестановку, и разбиение; тем самым, мы установили между ними универсальную биекцию.

Заметим, что отыскание красивых 1-1-соответствий в комбинаторике — задача даже более глубокая, чем поиск простых явных формул для количества объектов. Ведь очень часто таких формул просто нет.

Не менее сильным инструментом в изучении комбинаторных объектов служат *производящие функции*.

Если у нас есть некоторая последовательность a_m (скажем, выражающая количество каких-то объектов в зависимости от параметра $m \ge 0$), то производящая функция — это формальный степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots$$

Например, для числа C_{100}^m m-элементного подмножества множества {1, 2, ..., 100} производящая функция будет просто многочленом:

$$C_{100}^0 + C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 + \ldots + \ldots + C_{100}^{100}x^{100} = (1+x)^{100}.$$

Когда, как в этом примере, производящую функцию удается «свернуть» или выразить через другие функции, нередко можно получить массу интересных соотношений между коэффициентами или хорошие оценки для них. Разумеется, в задачах с несколькими параметрами используются и производящие функции от нескольких переменных, например,

$$\sum_{n\ge0}\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^n = \sum_{n\ge0}(1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

В заключительном разделе мы приведем еще несколько трудных задач, где участвуют производящие функции для перечисляющих последовательностей, связанных с ГС-перестановками и другими аналогичными комбинациями.

Задачи «на десерт»

Раньше мы интересовались всевозможными разбиениями множества из $2n$ элементов на пары. Теперь же поставим более общий вопрос о разбиении произвольного множества из p элементов на q блоков без каких-либо специальных ограничений. Пусть $S(p, q)$ — число таких разбиений.

Вернемся к ГС-перестановкам.

Назовем *спадом* (или спуском, или десантом) пару соседних чисел, если левое из этих чисел больше правого. Пусть $B_{k,i}$ — число ГС-перестановок с ровно $i-1$ спуском на мультимножестве $\{11, 22, \ldots, kk\}$.

Задача 1 (очень трудная). Докажите, что

$$(1-x)^{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty} S(n+k, n)x^n = \sum_{i=1}^{k} B_{k,i}x^i.$$

(Напомним, что степенные ряды перемножаются так же, как и многочлены, которые тоже можно рассматривать как ряды, коэффициенты которых, начиная с некоторого места, равны 0.)

Задача 2 (трудная). Докажите тождество, установленное недавно В.С.Шевелевым:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{m-j}C_{2m}^{m-j}S(m+j, j) = (2m-1)!!$$

Задача 3 (менее трудная, чем задачи 1 и 2). Докажите, что $S(n+k, n)$ является многочленом от n степени $2k$, и найдите коэффициент этого многочлена при n^{2k}.

(**Ответ.:** $\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!}$.)

Мы надеемся, что нам удалось познакомить вас с «кухней» современной перечислительной комбинаторики. На этой «кухне» мы встретились с несколькими замечательными математиками, а в заключение у нас появилась возможность попробовать собственные силы в увлекательной науке, имя которой — комбинаторика.

Список рекомендуемой литературы

1. *Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И.Шварцбурд.* Алгебра и математический анализ (для школ с углубленным изучением математики). Часть II. М.: Просвещение, 1990.

2. *Ю.Ионин.* Сколько вариантов? Приложение к журналу «Квант» №2/94.

3. *Г.Радемахер, О.Теплиц.* Числа и фигуры. М.: Наука, 1966. Раздел 9 (см. также разделы 7,2 и 11).

4. *И.С.Соминский.* Элементарная алгебра (дополнительный курс). Изд. 3-е (или любое другое). М.: Наука, 1967. Глава 2.

5. *В.А.Кречмар.* Задачник по алгебре (любое издание). Раздел 9. Задачи 36—40.