Гравитационная машина

А. САМБЕЛАШВИЛИ

В 1994 ГОДУ на Международном турнире юных физиков в Голландии его участникам была предложена такая задача:

«Имеется массивная стальная плитка, расположенная горизонтально и колеблющаяся вдоль вертикали по гармоническому закону с амплитудой $A \approx 3$ мм и частотой $\omega \approx 500$ с$^{-1}$. На плитку кладут маленький (радиусом ≈ 1 мм) стальной шарик, который вследствие соударений с плиткой начинает подпрыгивать вверх-вниз. Определите, как меняется средняя (за некоторый промежуток времени) максимальная высота подскока шарика со временем, и объясните полученные результаты».

Задача эта привлекательна своей кажущейся простотой и одновременно связью с фундаментальными физическими представлениями. О них будет сказано ниже, а пока попробуем ответить на вопрос задачи, т.е. определить (хотя бы качественно) зависимость средней максимальной высоты подскока шарика от времени. Быстрее всего это можно сделать, проведя эксперимент. Собрать установку, описанную в задаче, — дело несложное. Существует множество различных способов заставить плитку колебаться, один из них — присоединить ее с помощью кривошипного механизма к обыкновенному электромотору. Чтобы шарик подпрыгивал вдоль вертикали и не отскакивал в стороны, над плиткой можно поставить трубку с прозрачными стенками. Если же вы умеете программировать, то вам не составит большого труда смоделировать задачу на компьютере.

Тот, кто не пожалеет времени на создание модели, вознаградит себя наблюдением удивительного, на первый взгляд, явления: средняя высота подскока шарика будет постепенно увеличиваться с течением времени до тех пор, пока не достигнет некоторого предельного значения. Этот эффект получил название «ускорения», а сама установка — «гравитационной машины», поскольку гравитационое притяжение служит механизмом, возвращающим шарик назад к плитке.

Попробуем объяснить увиденное. Прежде всего запишем законы движения шарика и плитки, направив ось X вертикально вверх, а за начало координат выбрав положение равновесия, относительно которого колеблется плитка (см.рисунок):

$$x_ш(t) = x_ш(t_n) + v_n(t - t_n) - \frac{g(t - t_n)^2}{2},$$

$$x_п(t) = A\sin\omega t,$$

где $x_ш(t)$ — координата шарика в момент времени t, $x_п(t)$ — координата плитки, t_n — момент n-го по счету столкновения шарика с плиткой, v_n — абсолютная величина скорости шарика непосредственно после n-го столкновения. Первое уравнение описывает движение шарика в промежутках между соударениями. При соударениях его скорость меняется скачком. Пусть t_{n+1} — момент времени $(n+1)$-го столкновения. В этот момент скорость плитки $v_п = x_п'(t_{n+1}) = A\omega\cos(\omega t_{n+1})$. Примем в качестве допущения (оно оправдывается экспериментом), что максимальная высота подскоков шарика велика по сравнению с амплитудой колебаний плитки. Это позволит нам считать скорости шарика (здесь и далее под скоростью подразумевается ее абсолютная величина) сразу после n-го и непосредственно перед $(n+1)$-м столкновениями приблизительно равными. Полагая соударения абсолютно упругими, нетрудно получить выражение для скорости шарика непосредственно после $(n+1)$-го соударения:

$$v_{n+1} = v_n + 2v_п = v_n + 2A\omega\cos\varphi_{n+1},$$

где $\varphi_{n+1} = \omega t_{n+1}$ — фаза колебаний плитки в момент $(n+1)$-го соударения.

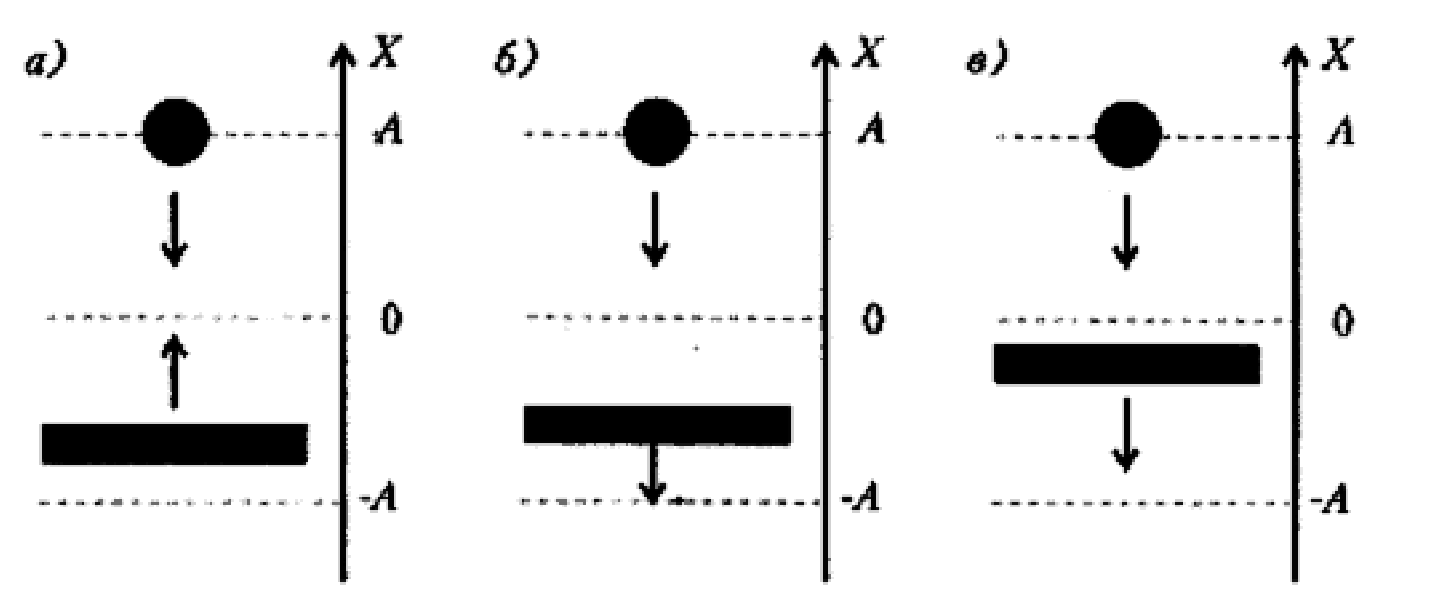
Последнее соотношение показывает, что при $\varphi_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ $\cos\varphi_{n+1} > 0$, т.е. плитка в момент соударения движется вверх, навстречу шарику. В результате столкновения скорость шарика возрастает, следовательно, возрастает его энергия $mv_n^2/2$ и максимальная высота подскока $h_n = v_n^2/(2g)$. При $\varphi_{n+1} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\cos\varphi_{n+1} < 0$ — плитка в момент соударения движется вниз, как бы убегая от шарика, поэтому его скорость, энергия и максимальная высота подскока в результате столкновения уменьшаются. Таким образом, максимальная высота подскока полностью зависит от того, какую фазу φ_n имела плитка в момент столкновения t_n.

Наблюдаемое в эксперименте увеличение с течением времени средней максимальной высоты подскока шарика наводит на мысль о том, что шарик чаще сталкивается с плиткой, движущейся навстречу ему, чем с движущейся от него. Для обоснования этого утверждения рассмотрим систему шарик — плитка в момент времени t^*, в который шарик падает вниз и имеет координату $x(t^*) = A$. Для движения плитки в момент t^* возможны несколько случаев.

1) Фаза плитки $\varphi(t^*) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (рис.*а*). Плитка движется вверх, навстречу шарику, следовательно, столкновение приведет к увеличению энергии шарика.

2) $\varphi(t^*) \in \left[\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис.*б*). Плитка движется вниз и имеет координату, близкую к $-A$. При достаточно малом ε за время падения шарика в пределах $x \in [-A, A]$ плитка успеет достигнуть нижней точки $x = -A$ и изменить направление своего движения. В этом случае столкновение шарика с плиткой произойдет при их движении навстречу друг другу, и в результате энергия шарика увеличится.

3) $\varphi(t^*) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right]$ (рис.*в*). Плитка движется вниз, причем ее координата намного отличается от $-A$, так что за время падения шарика от положения



$x(t^*) = A$ она не успевает достигнуть нижней точки $x = -A$ и изменить направление движения. В этом случае столкновение шарика с убегающей плиткой приведет к уменьшению его энергии.

Итак, увеличению энергии шарика соответствует промежуток фаз $\varphi(t^*) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, 2\pi\right]$, а уменьшению — промежуток $\varphi(t^*) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right]$. Как видно, первый промежуток на 2ε шире, чем второй. Если предположить, что в момент t^* фаза плитки с равной вероятностью принимает значения от 0 до 2π, то наши рассуждения приводят к такому выводу: столкновения шарика с плиткой, движущейся навстречу, более вероятны, чем с движущейся в том же направлении, и, следовательно, происходят чаще. Значит, в среднем шарик чаще получает энергию, чем отдает, что и объясняет наблюдаемый рост средней максимальной высоты его подскока. В реальных условиях столкновения не могут быть абсолютно упругими, т.е. происходит переход энергии в тепло (диссипация). Этим фактом обусловлено существование предельной максимальной высоты подскока.

Задачу можно было бы считать решенной, если бы не предположение о равновероятном распределении фазы плитки в момент времени t^*. Вообще говоря, фазу столкновения всегда можно определить точно из законов движения шарика и плитки, почему же мы говорим о ней как о случайной величине, да еще и равномерно распределенной? Все дело тут в слове «точно». В действительности всякая физическая величина может быть определена лишь с известной степенью точности. Оказывается, если в определении фазы некоторого столкновения мы ошибемся на число порядка $10^{-3} \cdot 2\pi$, то уже через несколько столкновений значение фазы, полученное из расчета, будет отличаться от действительного на величину, сравнимую с 2π. Системы, в которых малое отклонение в значениях определяющих параметров приводит к существенным изменениям, в динамике принято называть *хаотическими*. Поведение таких систем на практике почти никогда не удается предсказать в точности, и поэтому об их состоянии в некоторый момент времени говорят с той или иной долей вероятности, как если бы на движение этих систем влияли случайные факторы.

Идея механической модели, описанной в задаче, впервые была предложена Э.Ферми для объяснения громадных энергий частиц, прилетающих на Землю в космических лучах. Потоки частиц, «сталкиваясь» с переменными магнитными полями галактик и газовых скоплений, ускоряются подобно тому, как ускоряется шарик при соударениях с массивной плиткой.

В этой связи возникает вопрос: может ли ускорение шарика продолжаться неограниченно долго? В случае неупругого столкновения ответ ясен: нет, не может, так как теряемая в виде тепла энергия увеличивается с ростом энергии шарика. Интересно, что, даже если соударения упругие, все равно энергия шарика будет ограничена. Хотя, согласно нашим рассуждениям, средняя энергия шарика должна возрастать, тем не менее, нужно понимать, что выражение для скорости шарика справедливо только в предположении, что энергия плитки много больше энергии подпрыгивающего шарика. Иными словами, мы считаем, что массивная плитка значительно изменяет энергию шарика, а шарик на движение плитки почти не влияет. Это допущение становится неверным, если средние энергии шарика и плитки сравнимы по величине. В этом случае, как нетрудно показать, увеличения средней энергии шарика при его столкновении с движущейся навстречу плиткой не происходит. Таким образом, средняя энергия шарика будет возрастать до тех пор, пока не станет сравнимой со средней энергией плитки.

Если интерпретировать шарик как малую частицу, а плитку как газ из массивных молекул, в который эта частица помещена, то наши рассуждения позволяют заключить, что средняя кинетическая энергия частицы будет увеличиваться, пока не сравняется со средней кинетической энергией молекул газа. Усмотрев это следствие из знаменитой теоремы Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы в задаче про гравитационную машину, мы могли бы сразу дать ответ на поставленный в ней вопрос. Необходимо заметить, однако, что правомерность обращения к теореме Больцмана существенно связана с хаотичностью (со стохастичностью) системы шарик – плитка. Характерной особенностью таких систем является своеобразная эволюция в их описании. Точно заданные законы движения содержат в себе хаотичность (при определенных условиях), которая в результате приводит к необходимости вероятностного описания.