ОЛИМПИАДЫ

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Задачи районного тура

1 (6 кл.). Закрасьте несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы любая закрашенная клетка имела общую сторону ровно с тремя незакрашенными, а любая незакрашенная — ровно с одной закрашенной.

Ю.Базлов

2 (6 кл.). На прямой расположены пять точек — A, B, C, D, E (именно в таком порядке). Известно, что $AB = 19$ см, $CE = 97$ см, $AC = BD$. Найдите длину отрезка DE.

Р.Семизаров

3 (6 кл.). На семи карточках написаны числа от 1 до 7. Двум мудрецам дали по три карточки, а одну спрятали. Изучив свои карточки, первый мудрец сказал второму: «Сумма твоих чисел нечетна». Какие карточки у первого мудреца?

С.Иванов

4 (6 кл.). Юра задумал натуральное число, умножил его на 13 и зачеркнул последнюю цифру результата. Полученное число он умножил на 7 и опять зачеркнул последнюю цифру результата. Получилось число 21. Какое число задумал Юра?

К.Кохась

5 (8 кл.). В четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Прямые AL и CK пересекаются в точке P, прямые AM и CN — в точке Q. Оказалось, что $APCQ$ — параллелограмм. Докажите, что $ABCD$ — тоже параллелограмм.

А.Храбров

6 (9 кл.). Можно ли в клетках квадрата 6×6 расставить натуральные числа так, чтобы сумма чисел любого прямоугольника 1×4 делилась на 3, а сумма всех чисел не делилась на 3?

7 (9 кл.). Даны три квадратных трехчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Известно, что каждый из этих трехчленов имеет общий корень с суммой двух других трехчленов. Докажите, что сумма этих трехчленов равна нулю.

С.Берлов

8. Функция f определена на всей вещественной оси и при всех x удовлетворяет неравенству

$$\sqrt{2f(x)} - \sqrt{2f(x) - f(2x)} \geq 2.$$

а)(10 кл.) Докажите неравенство $f(x) \geq 4$.

б)(11 кл.) При каком наибольшем a можно утверждать, что при всех x выполняется неравенство $f(x) \geq a$?

А.Храбров

Задачи городского тура

9 (6 кл.). В четырехзначном числе каждую цифру увеличили на 1 или на 5, в результате чего оно увеличилось в четыре раза. Каким могло быть исходное число?

Ю.Базлов

10. На поле брани встретились армии толстых и тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый толстый солдат выстрелил в одного из тонких. Затем каждый уцелевший тонкий выстрелил в одного из толстых.

а)(6 кл.) Докажите, что выжило не менее 1000 солдат.

б)(7 кл.) После этого каждый уцелевший толстый еще раз выстрелил в одного из тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

С.Берлов

11 (7 кл). Клетчатый прямоугольник, обе стороны которого больше 1, разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Пусть A — количество квадратов 2×2, состоящих из двух доминошек, B — количество квадратов 2×2, состоящих из клеток четырех разных доминошек. Докажите, что $A > B$.

Д.Карпов, С.Иванов

12 (8 кл.). Докажите, что уравнение

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) = z^2 + 1$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

А.Голованов

13 (9 кл.). Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили произведение 1. Найдите эти корни.

С.Берлов

14 (9 кл.). Какое наименьшее число клеток можно закрасить в квадрате 100×100, чтобы в любом прямоугольнике 1×2 была хотя бы одна закрашенная клетка, а в любом прямоугольнике 1×6 имелись бы соседние закрашенные клетки?

А.Дюбина

15. а)(9 кл.) В городе Незнакомске $3n$ жителей, причем любые два жителя имеют общего знакомого. Докажите, что можно указать n человек таких, что каждый из остальных знаком хотя бы с одним человеком из этих n.

б)(10 кл.) В городе Незнакомске миллион жителей, причем любые два из них имеют общего знакомого среди остальных. Докажите, что можно выбрать 5000 жителей города так, чтобы любой из оставшихся имел хотя бы одного знакомого среди выбранных.

С.Берлов, С.Иванов

16 (10 кл.). Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и CD в точках X и Y. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BD. Докажите, что точки C, X, Y и A' лежат на одной окружности.

С.Берлов

Задачи отборочного тура

17 (9 кл.). Докажите, что у всякого натурального числа количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 1 или 9, не меньше, чем количество делителей, десятичная запись которых оканчивается на 3 или 7.

А.Храбров

18 (9 кл.). Можно ли разрезать (по клеточкам) квадрат 1997×1997 на квадраты со сторонами больше 30 клеток?

Д.Карпов

19 (10 кл.). Клетчатый квадрат 100×100 сложили несколько раз по линиям сетки и сделали два прямолинейных разреза, также идущих по линиям сетки. На какое наибольшее число частей мог быть разрезан квадрат таким способом?

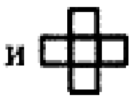
А.Дюбина

20 (10 кл.). На плоскости расположены $2n + 1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n+1)(2n+1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.

С.Иванов

21 (10 кл.). 360 точек разбивают окружность на равные дуги. Проведено 180 непересекающихся хорд с вершинами в этих точках. Рассмотрим еще 180 хорд, получающихся из данных поворотом окружности на угол α. Докажите, что эти 360 хорд образуют замкнутую ломаную при $\alpha = 1°$ и не могут образовывать замкнутую ломаную при $\alpha = 38°$.

Д.Карпов

22 (11 кл.). Можно ли доску 75×75 разбить на фигурки вида  и  ?

К.Кохась

23 (11 кл.). Докажите, что при $x \geq 2$, $y \geq 2$, $z \geq 2$

$$\left(y^3+x\right)\left(z^3+y\right)\left(x^3+z\right) \geq 125xyz.$$

К.Кохась, А.Пастор

24 (11 кл.). Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B. На окружности S_1 выбрана точка Q. Прямые QA и QB пересекают окружность S_2 в точках C и D, касательные к S_1 в точках A и B пересекаются в точке P. Точка Q расположена вне S_2, точки C и D — вне S_1. Докажите, что прямая QP проходит через середину отрезка CD.

С.Берлов

25 (11 кл.). На листе клетчатой бумаги рисуют выпуклый 50-угольник с вершинами в узлах сетки. Какое наибольшее число диагоналей этого 50-угольника может идти по линиям сетки?

А.Голованов

Публикацию подготовили
С.Берлов, С.Иванов, К.Кохась