Электромеханические задачи

В.МОЖАЕВ

СРЕДИ разнообразных физических задач есть так называемые смешанные задачи, которые нельзя отнести к какому-то одному определенному разделу физики. В таких задачах, как и в природных процессах, тесным образом переплетаются различные физические явления. В этой статье мы рассмотрим задачи, которые можно причислить к разряду электромеханических — в них речь идет о движении механических систем при воздействии на них электрических и магнитных сил.

Задача 1. *Минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома водорода (энергия ионизации), равна $W_i = 2{,}2\cdot 10^{-18}$ Дж. Полагая, что электрон вращается по круговой орбите вокруг небольшого тяжелого положительно заряженного ядра (протона), определите силу электростатического взаимодействия между электроном и протоном.*

Слово «тяжелое» по отношению к ядру означает, что его масса много больше массы электрона, и поэтому можно считать, что центр вращения системы протон — электрон совпадает с центром масс протона. Обозначим радиус круговой орбиты электрона через r. Движение электрона по окружности радиусом r происходит под действием электростатической силы, действующей на электрон со стороны протона. Второй закон Ньютона позволяет записать:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2},$$

где m — масса электрона, v — его скорость, e — величина заряда. С помощью этого уравнения найдем кинетическую энергию электрона:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия электрона и протона, как системы точечных зарядов, равна

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Таким образом, полная энергия электрона, находящегося на круговой орбите радиусом r в атоме водорода, составляет

$$W = W_k + W_p = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

(Как это и характерно для финитного движения частицы в потенциальном поле, полная энергия электрона является отрицательной величиной.)

Очевидно, что минимальная энергия, необходимая для удаления электрона из атома водорода, соответствует такому новому состоянию электрона, когда он находится на большом (много больше радиуса орбиты) расстоянии от атома и его скорость равна нулю. В этом состоянии полная энергия электрона также равна нулю, поэтому минимальная дополнительная энергия, сообщенная ему, составляет

$$W_i = -W = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Отсюда находим радиус орбиты электроны:

$$r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 W_i}$$

и силу электростатического взаимодействия электрона с протоном:

$$F_{эл} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{16\pi\varepsilon_0 W_i^2}{e^2} = 8{,}4\cdot 10^{-8}\ \text{Н}.$$

Задача 2. *Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом q и массой m, связаны нерастяжимыми нитями длиной L каждая. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Одна из нитей пережигается. Какие скорости будут у шариков в тот момент, когда они будут располагаться на одной прямой? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.*

В начальный момент шарики расположены в вершинах равностороннего треугольника с длиной каждой стороны L (рис.1). Шарики неподвижны, поэтому их полная кинетическая энергия равна нулю:

$$W_{k1} = 0.$$

Потенциальная энергия электростатического взаимодействия составляет

$$W_{p1} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}.$$

(В этом выражении каждый член соответствует энергии взаимодействия пары зарядов, а всего таких пар три.) Поскольку нить нерастяжима, энергия упругих деформаций равна нулю. Итак, в

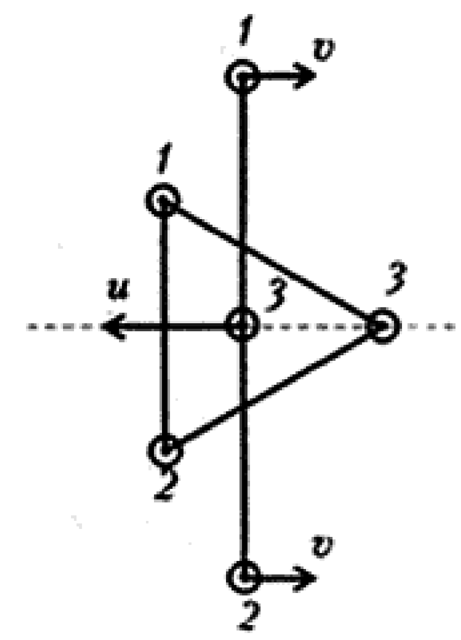

Рис. 1

исходном состоянии полная энергия системы составляет W_{p1}, а импульс системы равен нулю.

После пережигания нити (например, между шариками *1* и *2*) центр масс шариков остается неподвижным, и когда шарики будут располагаться на одной прямой, шарик *3* будет находиться в центре масс нашей системы. Действительно, как до пережигания нити, так и после пережигания между шариками действуют только внутренние силы (замкнутая система), а так как начальная скорость центра масс была равна нулю, то центр масс системы будет оставаться неподвижным.

Пусть в тот момент, когда шарики расположены на одной прямой, скорость шарика *3* равна u, а скорости двух других шариков равны v (в силу симметрии, скорости шариков *1* и *2* одинаковы). По закону сохранения импульса,

$$mu - 2mv = 0,\ \text{или}\ u = 2v.$$

Кинетическая энергия шариков в этот момент равна

$$W_{k2} = \frac{mu^2}{2} + 2\frac{mv^2}{2} = 3mv^2.$$

Новая потенциальная энергия электростатического взаимодействия состав-

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 31)

ляет

$$W_{p2}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}+\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}+\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}=\frac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}.$$

Закон сохранения полной энергии системы позволяет записать

$$W_{k1}+W_{p1}=W_{k2}+W_{p2},$$

или

$$\frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}=3mv^2+\frac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 L}.$$

Отсюда находим скорость шариков *1* и *2*:

$$v=\frac{q}{2\sqrt{6\pi\varepsilon_0 mL}}$$

и скорость шарика *3*:

$$u=\frac{q}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 mL}}.$$

Задача 3. *Плоский конденсатор с прямоугольными пластинами, подключенный к источнику постоянного напряжения U = 100 В, установлен в вертикальном положении так, что его пластины соприкасаются с диэлектрической жидкостью (рис.2). Расстояние между пластинами d = 0,5 мм много меньше линейных размеров пластин. Определите установившуюся высоту поднятия жидкости между пластинами, если жидкостью является вода с диэлектрической проницаемостью ε = 81 и плотностью ρ = = 10³ кг/м³. Капиллярными эффектами пренебречь.*

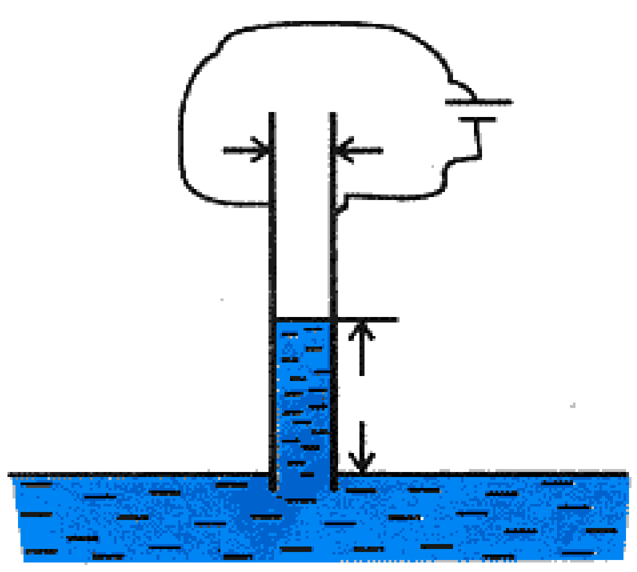

Рис. 2

Наша электромеханическая система включает в себя заряженный конденсатор (при постоянном напряжении U на обкладках), источник постоянного напряжения и диэлектрическую жидкость, находящуюся в поле тяжести Земли. Любая замкнутая система стремится прийти в такое устойчивое состояние, при котором она обладает минимумом энергии. Именно с такой позиции мы и будем исследовать нашу систему.

Пусть в стационарном состоянии высота подъема уровня диэлектрической жидкости между обкладками конденсатора равна z. Найдем полную энергию W нашей системы, которая включает в себя энергию электрического поля конденсатора $W_к$, потенциальную энергию поднятой жидкости $W_ж$ и энергию источника постоянного напряжения $W_и$. Емкость нашего конденсатора равна сумме емкостей конденсатора высотой z, заполненного диэлектрической жидкостью, и пустого конденсатора высотой $(H-z)$:

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 Lz}{d}+\frac{\varepsilon_0 L(H-z)}{d}=\frac{\varepsilon_0 L}{d}\left(H+(\varepsilon-1)z\right),$$

где H — высота пластин конденсатора, L — их длина. Электрическая энергия, запасенная в таком конденсаторе, составляет

$$W_к=\frac{CU^2}{2}=\frac{\varepsilon_0 LU^2\left(H+(\varepsilon-1)z\right)}{2d}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости равна

$$W_ж=\frac{\rho Ldgz^2}{2}$$

(за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принят уровень $z=0$). Теперь разберемся с энергией источника. Обозначим исходную энергию источника через W_0. В тот момент, когда емкость между пластинами конденсатора равна C, на них находится заряд $Q=CU$. Следовательно, наш источник истратил часть своей энергии, равную совершенной работе $A=QU=CU^2$. Очевидно, что оставшаяся энергия источника составляет

$$W_и=W_0-CU^2=W_0-\frac{\varepsilon_0 LU^2}{d}\left(H+(\varepsilon-1)z\right).$$

Тогда полная энергия системы равна

$$W(z)=W_к+W_и+W_ж=W_0-\frac{\varepsilon_0 LU^2}{2d}\left(H+(\varepsilon-1)z\right)+\frac{\rho Ldgz^2}{2}.$$

Продифференцируем это выражение по z и приравняем нулю:

$$\frac{dW(z)}{dz}=-\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)LU^2}{2d}+\rho Ldgz=0.$$

Отсюда следует, что полная энергия нашей электромеханической системы будет минимальна при высоте жидкости

$$z_1=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2d^2\rho g}=1{,}45\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

Теперь обсудим приведенное решение. Чего мы добились, найдя минимум потенциальной энергии? Можно сказать, что мы провели исследование данной электромеханической системы на устойчивость и установили, что система имеет одно устойчивое состояние, при котором высота подъема диэлектрической жидкости равна z_1. Но это решение ничего не говорит о том, по какому закону и сколь быстро наша система придет в это устойчивое состояние. Если вы заметили, мы ничего не говорили о возможных потерях энергии. Наше решение никак не связано с потерями и не зависит от диссипации энергии в системе. Величиной энергетических потерь в системе определяется временной закон, по которому система будет подходить к своему устойчивому состоянию, но не параметры этого состояния. В качестве примера рассмотрите идеализированную ситуацию, когда в системе нет диссипации энергии. Попробуйте самостоятельно провести для этого случая энергетическое решение: работа источника идет на изменение энергии конденсатора и работу по подъему жидкости. Вы получите два значения высоты подъема: $z_1^*=0$, $z_2^*=2z_1$. Это означает, что жидкость в конденсаторе будет совершать незатухающие колебания около устойчивого положения равновесия с амплитудой z_1. Но реально потери всегда есть, и если они малы, колебания будут медленно затухать, а уровень жидкости со временем займет свое устойчивое положение $z=z_1$. При больших затуханиях жидкость будет медленно подниматься и стремиться все к тому же значению $z=z_1$.

Задача 4. *На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое непроводящее кольцо массой m, вдоль которого равномерно распределен заряд Q. Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Найдите угловую скорость вращения кольца после выключения магнитного поля.*

Обозначим радиус кольца через r. Спадание величины индукции магнитного поля от B_0 до нуля может произойти, конечно, и за очень малое время, но реально это всегда будет конечная величина. Пусть в произвольный момент времени (в процессе уменьшения индукции поля) мгновенное значение индукции магнитного поля равно $B(t)$. Изменяющееся во времени маг-

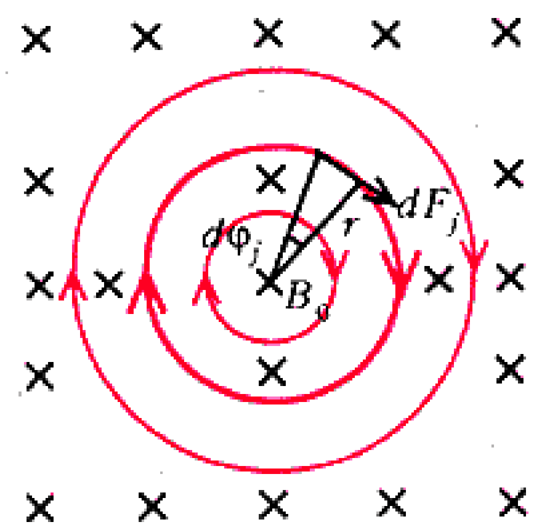

Рис. 3

нитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого на рисунке 3 изображены красными круговыми линиями (для простоты будем рассматривать симметричное распределение магнитного поля относительно нашего кольца). Одна из силовых линий, очевидно, проходит вдоль нашего кольца. Пусть в рассматриваемый момент величина напряженности вихревого электрического поля на этой силовой линии равна $E_B(t)$.

С одной стороны, работа, совершенная вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура кольца, численно равна ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = 2\pi r E_B(t).$$

С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции в контуре кольца равна

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий наш контур. Приравнивая два выражения для ЭДС индукции, получим

$$E_B(t) = -\frac{r}{2}\frac{dB(t)}{dt}.$$

На каждый небольшой элемент заряженного кольца будет действовать сила, направленная по касательной к окружности радиусом r и равная

$$dF_j = E_B(t)\frac{Q}{2\pi r} r\,d\varphi_j = -\frac{Q}{4\pi}\frac{dB(t)}{dt} r\,d\varphi_j.$$

Суммарная сила, действующая в данный момент времени на все кольцо, равна

$$F = \sum_{j=1}^{N} dF_j = -\frac{Qr}{4\pi}\frac{dB(t)}{dt}\sum_{j=1}^{N} d\varphi_j = -\frac{Qr}{2}\frac{dB(t)}{dt}.$$

За малое время Δt импульс силы, подействовавший на кольцо вдоль окружности, приведет к изменению импульса кольца:

$$F\Delta t = m\Delta v,$$

откуда получим

$$\Delta v = \frac{F}{m}\Delta t = -\frac{Qr}{2m}\Delta B$$

(мы учли, что $B'(t)\Delta t = \Delta B$). Малое изменение угловой скорости кольца составляет

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{r} = -\frac{Q}{2m}\Delta B.$$

Такое же соотношение связывает изменения угловой скорости и магнитной индукции за все время. Учитывая, что $\Delta\omega = \omega - 0 = \omega$; а $\Delta B = 0 - B_0 = -B_0$, получаем

$$\omega = \frac{QB_0}{2m}.$$

Задача 5. *По вертикальным проводящим рельсам, расстояние между которыми l, в поле тяжести может скользить без трения проводящая перемычка массой m. Рельсы замкнуты на идеальную катушку индуктивностью L. Вся система находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией, равной B и перпендикулярной плоскости рисунка 4. В начальный момент перемычка удерживается внешней силой. Определите максимальное смещение перемычки от начального положения после устранения внешней силы. Омическими потерями пренебречь.*

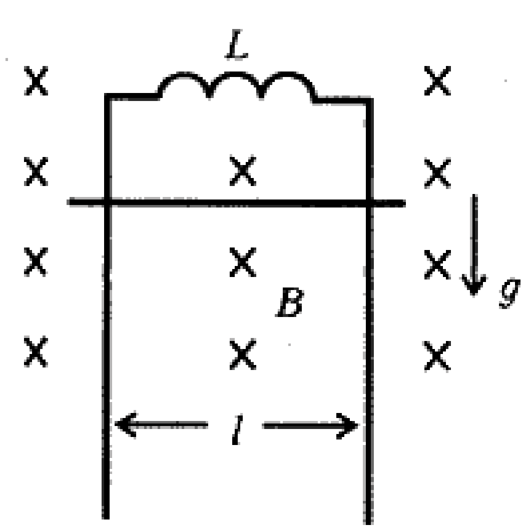

Рис. 4

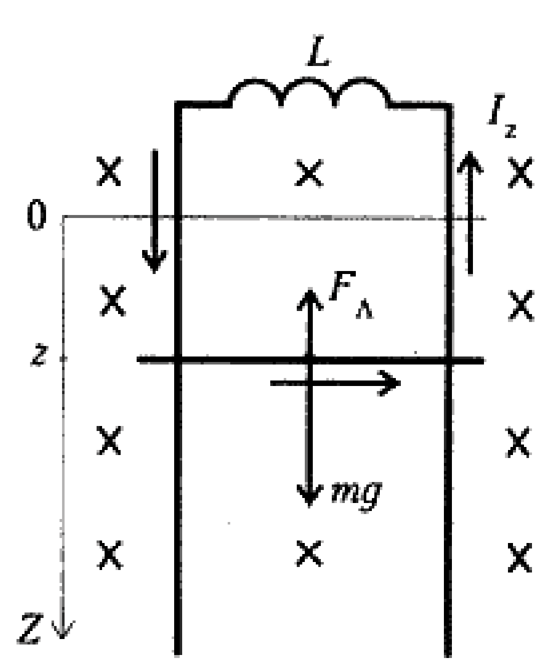

Рис. 5

В системе координат, изображенной на рисунке 5, начальное положение перемычки $z = 0$. Рассмотрим произвольный момент времени, когда перемычка находится на расстоянии z от начала координат и имеет скорость $v_z = \frac{dz}{dt}$. В результате пересечения линий магнитного поля в перемычке наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = v_z Bl.$$

Возникающий в замкнутом контуре ток I_z вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI_z}{dt}.$$

При отсутствии омического сопротивления алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна нулю:

$$Bl\frac{dz}{dt} - L\frac{dI_z}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(Blz - LI_z) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Blz - LI_z = \text{const}.$$

Поскольку при $t = 0$ $z = 0$ и $I_z = 0$, при $t \ge 0$ получаем

$$Blz - LI_z = 0.$$

На перемычку действуют две силы: сила тяжести, равна mg, и сила Ампера со стороны внешнего магнитного поля, равная $F_A = BI_z l$. Запишем уравнение движения перемычки вдоль оси Z:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - BI_z l,$$

или, после подстановки выражения для I_z,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{mL}z = g.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания перемычки относительно уровня $z = (mgL)/(Bl)^2$. В этом положении ускорение перемычки равно нулю и значение z равно амплитуде колебаний. А максимальное смещение перемычки, очевидно, равно двойной амплитуде, поэтому

$$z_{\max} = \frac{2mgL}{B^2l^2}.$$

Этот результат можно получить и

исходя из закона сохранения энергии. Попробуйте это сделать самостоятельно.

Задача 6. *В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием d между ними помещен в поток проводящей жидкости с удельным сопротивлением ρ, движущейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Конденсатор находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости рисунка 6. Найдите полезную тепловую мощность, которая выде-*

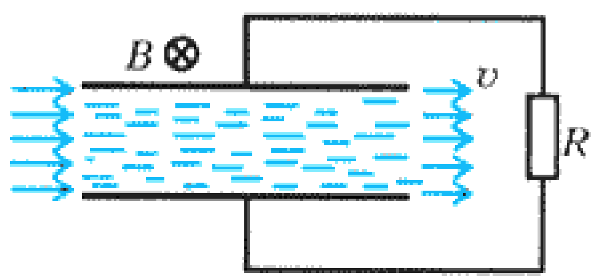

Рис. 6

ляется на внешней нагрузке в виде резистора сопротивлением R. Пренебрегая возможными потерями при протекании жидкости, определите также КПД такого генератора.

Рассмотрим вкратце процесс установления стационарного состояния – когда через резистор течет постоянный ток.

Как только проводящая жидкость начинает протекать между обкладками конденсатора, на свободные заряды жидкости со стороны внешнего магнитного поля начинает действовать сила Лоренца. Положительные заряды начинают смещаться к верхней пластине конденсатора, а отрицательные – к нижней. Между пластинами конденсатора возникает разность потенциалов, которая приводит к появлению тока через резистор R. Одновременно, возникшее электрическое поле начинает препятствовать движению свободных зарядов жидкости к пластинам. В результате через некоторое время устанавливается стационарное состояние: заряд, поступающий из жидкости на каждую пластину в единицу времени, равен силе тока, протекающего через резистор. Другими словами, в цепи резистора начинает течь постоянный ток. Обозначим его через I.

Теперь выясним, чему равна электродвижущая сила, которая поддерживает ток в цепи. По определению, ЭДС равна напряжению на пластинах конденсатора при разомкнутой внешней цепи. Условие отсутствия тока внутри конденсатора имеет вид $E = vB$, где E – напряженность электрического поля. Разность потенциалов между пластинами составляет $\mathcal{E} = Ed = vBd$. Это и

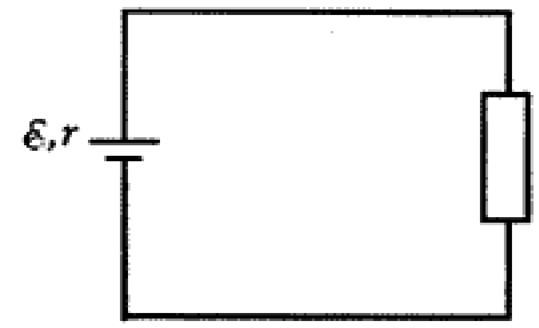

Рис. 7

есть величина электродвижущей силы, действующей в замкнутой цепи. Можно нарисовать эквивалентную электрическую схему – см. рисунок 7, где r – внутреннее сопротивление источника: $r = \rho d/S$.

Очевидно, что сила тока в такой цепи равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{vBd}{R+\rho d/S},$$

а мощность, выделяемая на резисторе, составляет

$$P_R = I^2R = \frac{(vBd)^2R}{(R+\rho\, d/S)^2} = \frac{(vBd)^2}{R(1+\rho d/(SR))^2}.$$

Для расчета КПД генератора необходимо найти мощность внешних сил, приводящих в действие генератор. Понятно, что работа внешних сил затрачивается на перемещение жидкости между пластинами конденсатора. Поскольку через жидкость течет ток I, на носители тока, а следовательно и на жидкость между пластинами, действует сила Ампера $F_A = BId$, которая направлена против движения жидкости. Для равномерного протекания жидкости на нее должна действовать внешняя сила, равная силе Ампера и направленная вдоль скорости течения. Мощность, развиваемая этой силой, равна

$$P = F_Av = BIdv = \frac{(vBd)^2}{R(1+\rho d/(SR))},$$

а КПД генератора –

$$\eta = \frac{P_R}{P} = \frac{1}{1+\rho d/(SR)}.$$

Как видно, КПД генератора определяется отношением омических сопротивлений жидкости и резистора. При стремлении этого отношения к нулю КПД стремится к единице.

Упражнения

1. Три одинаковых одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом q и массой m, связаны двумя нерастяжимыми нитями длиной l каждая. Все три шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной поверхности. Какую минимальную скорость необходимо сообщить центральному шарику вдоль оси, перпендикулярной нитям, чтобы при дальнейшем движении шарики смогли образовать равносторонний треугольник? Радиус шариков мал по сравнению с длиной нити.

2. Электрический диполь из двух жестко связанных точечных зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на расстоянии l друг от друга, пролетает через плоский конденсатор, пластины которого подключены к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ (рис.8). Определите

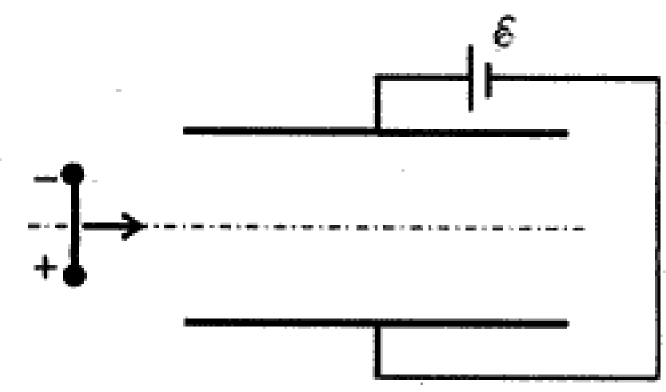

Рис. 8

скорость диполя в центре конденсатора, если известно, что его скорость вдали от конденсатора равна v_0. Расстояние между пластинами конденсатора d, масса диполя m.

3. На гладкой горизонтальной поверхности расположено тонкое проволочное кольцо радиусом r. Сопротивление кольца R. Кольцо находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости кольца. Индукция магнитного поля стала уменьшаться со временем по закону $B(t) = B_0 - At$, где A – константа. Чему равна максимальная сила натяжения проволоки кольца, обусловленная взаимодействием тока в кольце с внешним магнитным полем? Самоиндукцией кольца пренебречь.

4. По вертикальным проводящим рельсам, расстояние между которыми l, в поле тяжести может скользить без трения проводящая перемычка массой m. Рельсы замкнуты катушкой индуктивностью L и находятся в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рисунка 4. В начальный момент времени контакт удерживается внешней силой, а затем внешняя сила убирается и контакт начинает движение вниз с нулевой начальной скоростью. Определите величину индукции внешнего магнитного поля, если известно, что максимальная скорость, которую приобретает контакт, равна v_0. Омическими потерями пренебречь.