Легко ли забить гвоздь?

А.КЛАВСЮК, Е.СОКОЛОВ

ОДНАЖДЫ в нашем классе разгорелся спор: можно ли с одного удара забить гвоздь? Мнения, как всегда, разделились. Одни доказывали, что никакой проблемы здесь нет. Другие, не менее горячо и аргументированно, что проблема есть — «силы не хватит».

А как же на самом деле обстоят дела? Всегда ли, размахнувшись посильнее, можно вогнать гвоздь в дерево с одного удара или есть случаи, когда одной силы недостаточно?

Давайте разберемся в этом вместе.

Итак, можно ли с одного удара забить гвоздь?

Результаты экспериментов

Прежде чем приступать к теоретическим рассуждениям, мы решили экспериментально установить, какую силу необходимо прикладывать к гвоздю для того, чтобы вдавливать его в дерево. Полученные нами результаты изображены на рисунке 1. Измерения проводились для двух сортов дерева: «мягкого» — ели и «твердого» — бука. В качестве эталонного гвоздя из всех собранных нами гвоздей (рис.2) мы выбрали обрезок длинного и толстого гвоздя — длиной l_0 = 50 мм и радиусом поперечного сечения R = 2 мм, — который показался нам наиболее подходящим для подобных экспериментов. Вдавливание производилось с помощью пресса, позволяющего измерять прикладываемую силу.

В обоих случаях зависимость получилась линейной:

$$F(x) = F_0 + \frac{F_{\max} - F_0}{l_0}\, x\,,$$

где F_0 равно 0,4 кН для ели и 1,1 кН для бука, $F_{\max}$ равно, соответственно, 2,4 кН и 15,0 кН. Такую зависимость, на наш взгляд, и следовало ожидать.

При достаточно глубоком вдавливании гвоздя ($x \gg R$) в обжимающем гвоздь дереве можно выделить

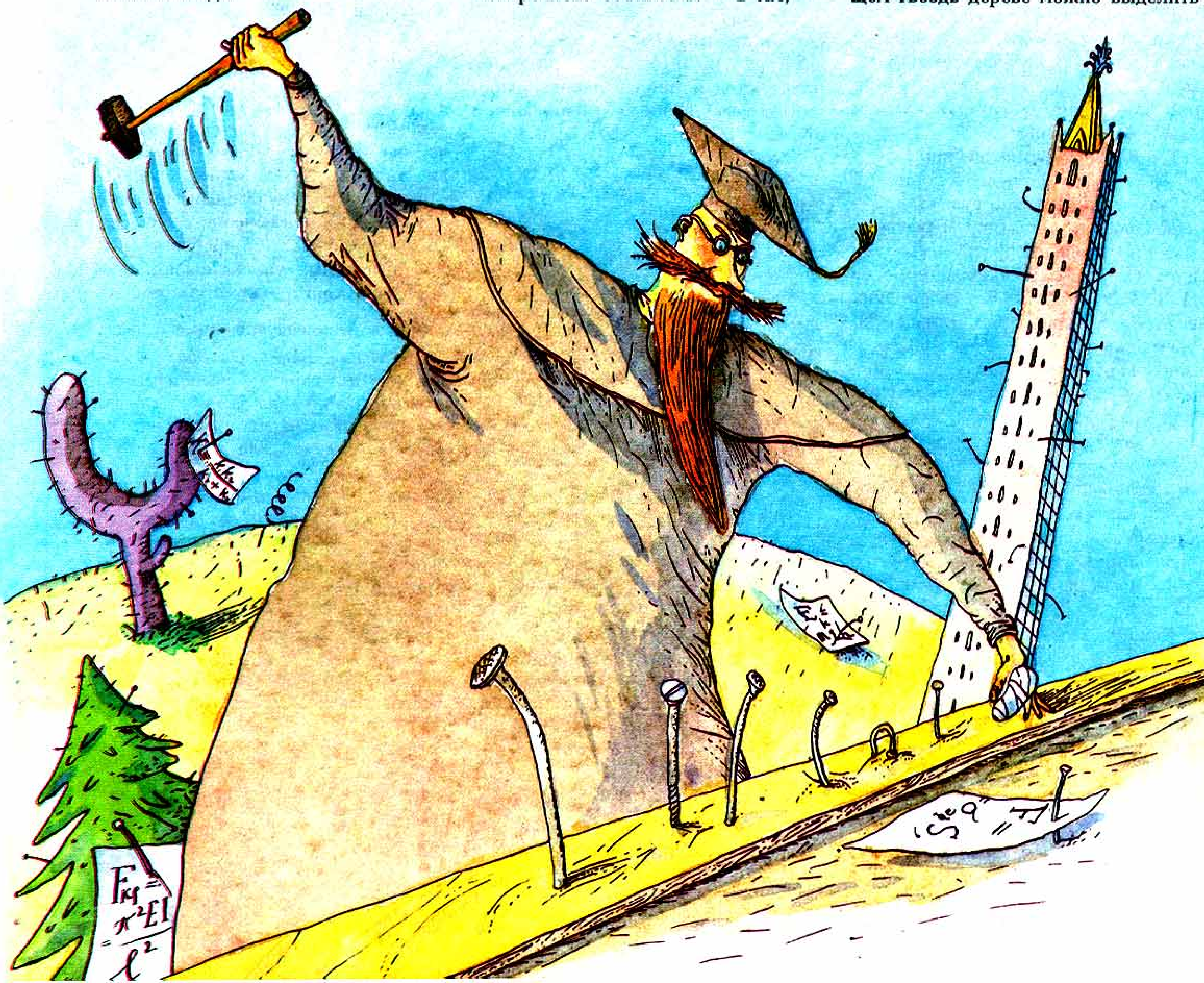

Иллюстрация А.Балдина

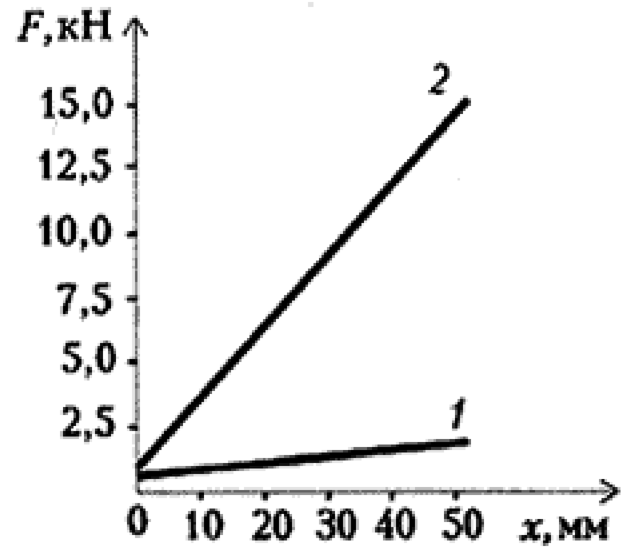

Рис.1. Экспериментальная зависимость силы сопротивления от глубины погружения (1 — ель, 2 — бук)

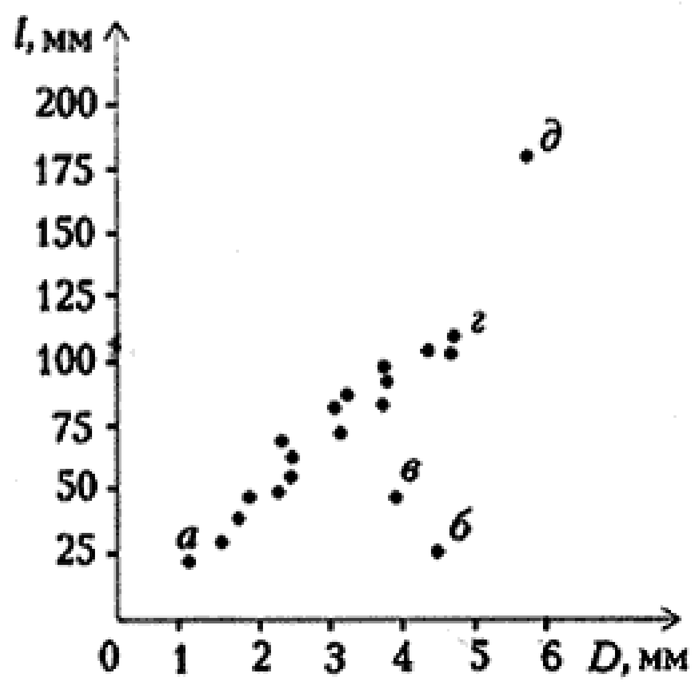

Рис.2. Параметры стандартного набора гвоздей (а — сапожный гвоздь, б — дюбель, в — экспериментальный гвоздь, г — шиферный, д — «двухсотка»)

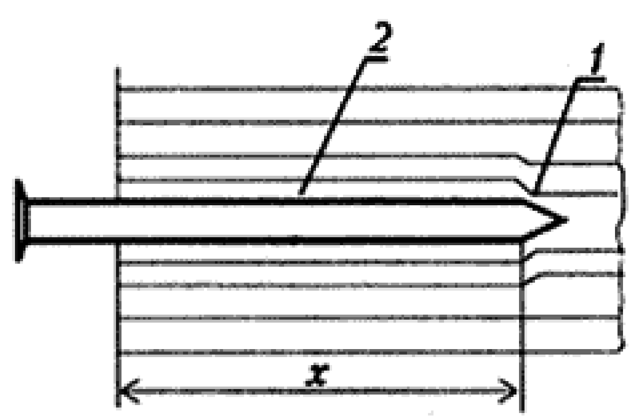

Рис.3. Распределение деформаций в дереве

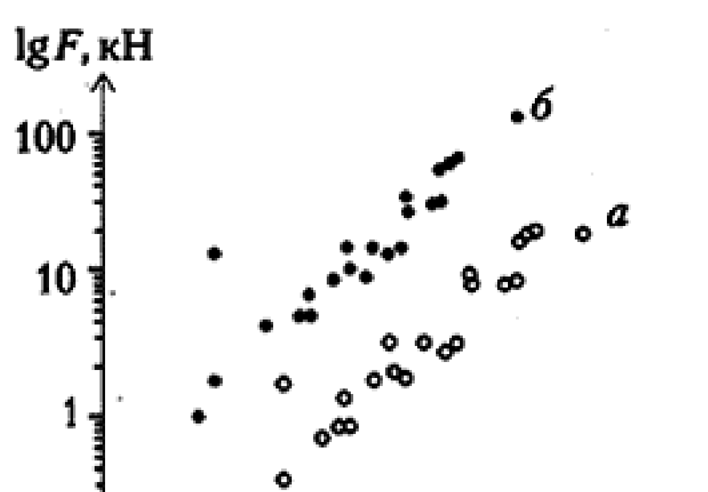

Рис.4. Силы, необходимые для вдавливания гвоздей (а — ель, б — бук)

две области с различным характером распределения напряжений (рис.3). Это, во-первых, область *1* размером порядка R вблизи острия гвоздя. Распределение напряжений здесь достаточно сложно. Однако ясно, что по мере вдавливания гвоздя картина в этой области не меняется. Следовательно, взаимодействие гвоздя с этой областью дает вклад в силу сопротивления, не зависящий от x:

$$F = \sigma_{эф} S,$$

где $\sigma_{эф}$ — некоторое характерное (эффективное) напряжение, S — площадь поперечного сечения гвоздя. (Отметим, что в опытах наблюдалось явление «застоя», которое мы связываем с периодическим образованием трещины, проходящей от острия гвоздя в глубь дерева.)

Основная часть гвоздя — область *2* — окружена равномерно сжатым деревом, обжимающим гвоздь с некоторым постоянным напряжением σ_1. При движении гвоздя возникает сила трения, величина которой прямо пропорциональна боковой поверхности погруженной части гвоздя:

$$F = 2\pi\mu\sigma_1 R x,$$

где μ — коэффициент трения. Таким образом, сила трения является ответственной за линейную часть силы сопротивления.

Итак, с силами, необходимыми для забивания гвоздей, все ясно, и у нас есть все необходимое для проведения теоретического исследования. Полученные экспериментальные данные и записанные формулы позволят вычислить значения любых интересующих нас величин. В качестве примера мы вычислили максимальные значения сил для стандартного набора гвоздей (рис.4). Оказывается, чтобы полностью вдавить в бук великан-«двухсотку», необходимо приложить силу 78 кН (это больше, чем вес слона), а для малютки-«двадцатки» достаточно всего 1,5 кН.

Итак, приступаем к теоретическому исследованию. Что же может помешать вбить гвоздь одним ударом?

Аргументы «за» и «против»

Первый аргумент «против», который приходит на ум при взгляде на полученные числовые значения, формулируется очень просто: «силы не хватит». Действительно, силы великоваты для того, чтобы вдавить гвоздь в дерево просто рукой. Но ведь у нас в руке молоток. А какой «выигрыш в силе» он дает? (Каждый ли с ходу ответит на этот вопрос?)

Давайте разберемся с возможностями молотка. Здесь удобно описать ситуацию формально. Тело (молоток), имеющее кинетическую энергию E_k, налетает на пружину (гвоздь) жесткостью k. Чему будет равно максимальное значение силы упругости при сжатии пружины? Узнали? Это известная школьная задача. Ее ответ:

$$F = \sqrt{2kE_k}.$$

Молоток очень «умный» инструмент — чем жестче предмет, по которому он бьет, тем больше сила. Эта формула отвечает и на массу других вопросов: почему удары по мягким частям тела менее болезненны, чем по твердым, почему трудно вбить гвоздь в незакрепленную доску (она просто «пружинит») и т.д.

Оценим с помощью этой формулы силы, возникающие при ударе молотком по эталонному гвоздю. Жесткость гвоздя легко определить с помощью известной формулы

$$k = E\frac{S}{l_0},$$

где $E = 2\cdot10^{11}$ Па — модуль Юнга стали. Что касается кинетической энергии молотка, то, разумеется, она зависит от «силы удара». Давайте для оценок рассмотрим два случая: удар «средней силы» и удар «со всего плеча». За «удар средней силы» примем удар, эквивалентный падению молотка (кувалды) с высоты 1 м. Кинетическая энергия для такого удара может быть рассчитана по формуле

$$E_k = mgh.$$

Название «со всего плеча» говорит само за себя. Для оценки энергии в этом случае примем, что по порядку величины она совпадает с той максимальной энергией, которую мы способны сообщить телу при бросании. При таком допущении нам достаточно прикинуть, на какое максимальное расстояние мы способны кинуть молоток и толкнуть кувалду. Максимальная дальность полета тела, брошенного с начальной скоростью v_0 под углом $\alpha = 45°$ к

Таблица

Удар «средней силы»				
	m(кг)	h(м)	E_k(Дж)	F(кН)
М.	0,5	1,0	5	25
К.	10	1,0	100	100
Удар «со всего плеча»				
	L(м)	E_k(Дж)	F(кН)	
М.	40	100	100	
К.	20	1000	300	

горизонту, равна

$$L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha=\frac{v_0^2}{g},$$

поэтому

$$E_k=\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mgL}{2}.$$

В таблицу мы записали оценки кинетической энергии обычного молотка (М.) и кувалды (К.) для ударов «средней силы» и «со всего плеча». Туда же мы занесли и вычисленные значения максимальной силы (F). Из таблицы видно, что даже при ударе «средней силы» силы вполне хватает. Аналогично обстоит дело и с другими гвоздями. «Запас силы» довольно значителен, особенно для гвоздей малых размеров, и в случае удара кувалдой «со всего плеча» на два порядка превышает максимальное значение силы сопротивления.

Справедливости ради отметим, что в действительности такие силы возникнут лишь в том случае, если гвоздь упирается в материал гораздо более жесткий, чем сталь. При забивании гвоздя в дерево фактически работают две последовательно включенные пружины: гвоздь и дерево.[1] Так что общая жесткость этой системы пружин равна

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}.$$

Однако и в этом случае запас в силе существенный. Действительно, для учета смягчающего действия дерева оценим его жесткость формулой

$$k_2=E_д R.$$

Возможность такой оценки видна из следующих рассуждений. Вообще говоря, «деревянная пружина» у нас очень странная — полупространство, заполненное деревом. Но при надавливании гвоздя существенным образом деформируется не все полупространство, а лишь полусферическая область вблизи острия гвоздя, которая больше похожа на стандартную пружину. Пространственный масштаб у нас один — радиус гвоздя R, поэтому естественно оценить длину этой области как R, а площадь как R^2. Отсюда и получается выписанная нами формула. Приняв модуль Юнга для дерева $E_д=5\cdot 10^{10}$ Па, для удара молотком «со всего плеча» по комбинированной пружине получим

$$F=80\text{ кН},$$

чего по-прежнему вполне достаточно.

Итак, с силой проблем нет.

Рассмотрим второй аргумент «против» — «энергии не хватит». В этом случае убедиться в обратном достаточно просто. Для того чтобы забить гвоздь, энергия молотка должна превышать значение

$$E_{\min}=A_{тр}+E_{p1}+E_{p2},$$

где $A_{тр}=(F_0+F_{\max})l_0/2$ — работа против силы трения, $E_{p1,2}$ — потенциальные энергии деформированных дерева и гвоздя. Первое слагаемое гораздо больше двух остальных. Например, для потенциальной энергии сжатия гвоздя можно записать

$$E_{p2}=\frac{\sigma^2}{2E}V\approx\frac{F_{\max}}{SE}\frac{F_{\max}}{2S}l_0S\approx$$

$$\approx\frac{F_{\max}}{SE}A_{тр}\ll A_{тр}.$$

Поэтому для забивания гвоздя достаточно, чтобы энергии молотка хватило для преодоления силы трения. Для эталонного гвоздя это составляет в случае ели 70 Дж, в случае бука — 400 Дж.

Таким образом, удара кувалдой должно хватить.

Так же оптимистично выглядят результаты расчета и для стандартных гвоздей (рис.5). В случае ели проблемы могут возникнуть лишь с вбиванием «двухсотки». Для бука энергии требуется побольше, но даже для «соток» соответствующие значения порядка 1000 Дж.

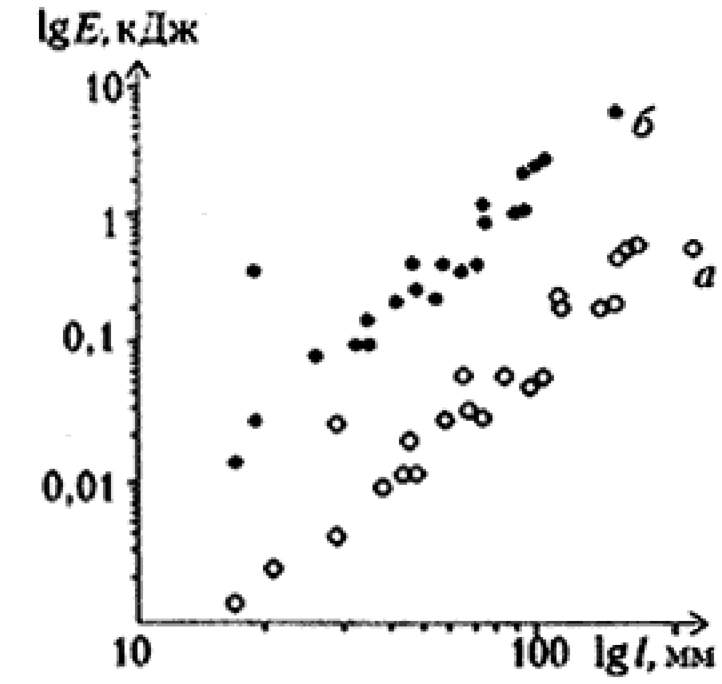

Рис.5. Энергии, необходимые для вдавливания гвоздей (а — ель, б — бук)

Последний и окончательный аргумент

Не обнаружив явных причин, запрещающих вбивать гвозди с одного удара, мы вернулись к эксперименту. Стали забивать гвозди, не жалея сил. И очень скоро все прояснилось. То, что раньше мы списывали на неудачу — при сильном ударе гвозди не забивались в бук, а просто гнулись, — и есть главное. Научное название этого эффекта — неустойчивость Эйлера.

Обычно неустойчивость Эйлера демонстрируют следующим образом. Пусть на шарнирно закрепленный стержень действует сила F (рис.6). Пока эта сила невелика, гвоздь прекрасно выдерживает нагрузку. Но как только сила превысит критическое значение

$$F_{кр}=\frac{\pi^2EI}{l^2},$$

стержень становится неустойчивым. Малейший его изгиб начинает катастрофически расти с ростом силы, и стержень ломается. (Такое поведение стержня само по себе удивительно. Оно совсем не похоже на обычное поведение упругих тел, к которому мы привыкли, — деформации постепенно увеличиваются с ростом приложенной силы. Обсуждение причины этого увело бы нас в сторону, поэтому ограничимся лишь замечанием, что связано это с экстремальным свойством отрезка прямой — он короче любой другой линии, соединяющей две точки.)

Величины, входящие в выражение для критической силы, могут быть

[1] *«Справедливости ради» отметим, что молоток — тоже колебательная система, и время прохождения волны вдоль молотка и обратно сильно влияет на качество удара. Так что у нас не две пружины, а три. Кроме того, конец гвоздя при каждом ударе углубляется в дерево, и сила сопротивления при этом меняется слабо. Поэтому дерево не совсем пружина. Но при численных оценках «с запасом» эти факторы не очень существенны. (Прим. ред.)*

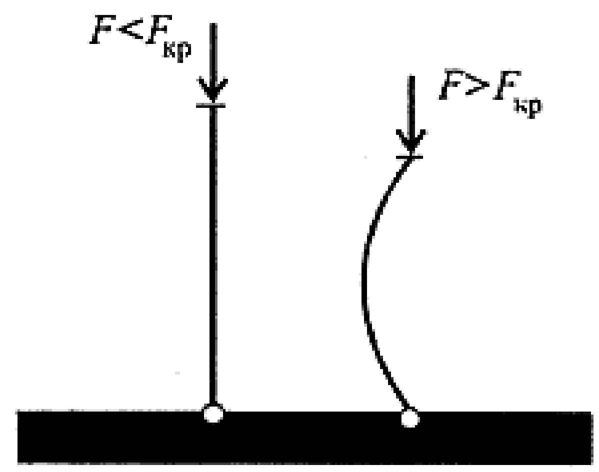

Рис.6. Неустойчивость Эйлера

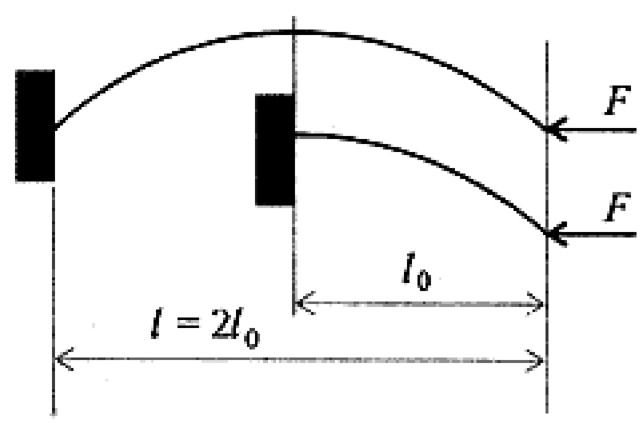

Рис.7. Половина шарнирно закрепленного стержня ведет себя как консольно закрепленный стержень

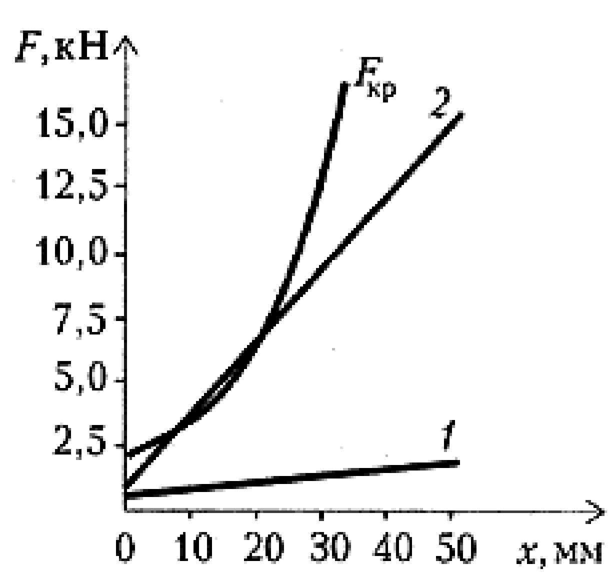

Рис.8. Гвоздь можно забить, если сила сопротивления меньше критической силы

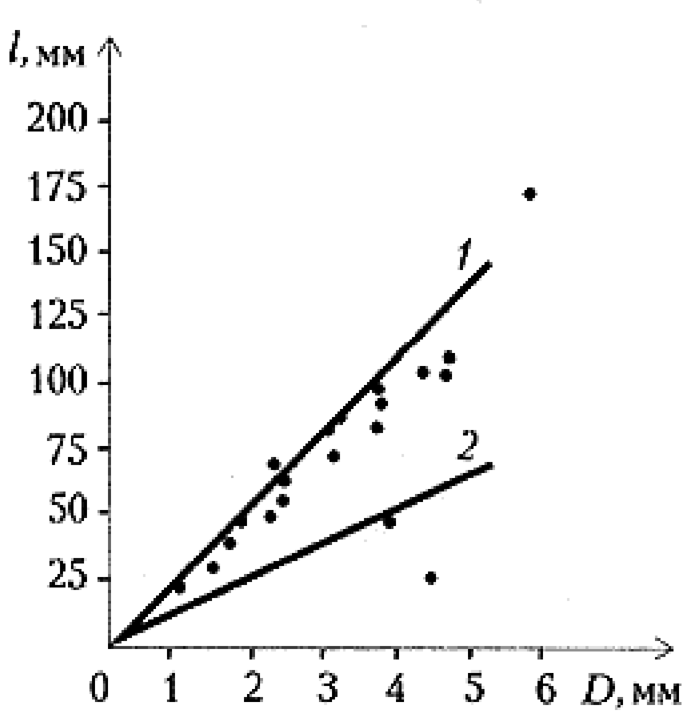

Рис.9. «Забиваемость» гвоздей (все гвозди, лежащие ниже прямой 1, можно забить в ель, а лежащие ниже прямой 2 — в бук)

легко вычислены для нашего эталонного гвоздя: $E = 2\cdot10^{11}$ Па — модуль Юнга стали, l — длина гвоздя, величина I называется моментом инерции поперечного сечения и зависит от размера и формы поперечного сечения гвоздя — так, для гвоздя стандартного круглого сечения $I = \pi R^4/4$ (а например, для старинного кованного гвоздя квадратного сечения $I = a^4/12$, где a — сторона квадрата). Единственное, нам надо несколько видоизменить формулу Эйлера для $F_{кр}$, так как мы рассматриваем уже частично вбитый гвоздь, который следует считать не шарнирно, а консольно закрепленным стержнем (у которого фиксированы и точка опоры, и направление стержня в этой точке). Условие устойчивости в этом случае легко получить, рассматривая равновесие шарнирно закрепленного стержня вдвое большей длины $l = 2l_0$ (рис.7). Если мысленно провести через середину такого стержня плоскость, оставшаяся часть гвоздя будет представлять собой консольно закрепленный стержень. Поэтому критическая сила для консольно закрепленного стержня равна критической силе для шарнирно закрепленного стержня вдвое большей длины:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l_0^2}.$$

Вот теперь мы готовы дать самый исчерпывающий ответ.[2]

На рисунке 8 для эталонного гвоздя изображена зависимость силы сопротивления и критической силы, равной

$$F_{кр}(x) = \frac{\pi^2 EI}{4(l_0 - x)^2} = \frac{F_э l_0^2}{(l_0 - x)^2},$$

где $F_э = 2{,}48$ кН, от глубины погружения x. Для ели эти кривые не пересекаются — гвоздь вбить в ель можно, и при желании с одного удара. В случае бука кривые пересекаются при x = 10 мм. Поэтому в бук гвоздь можно вбить лишь на глубину 10 мм, после этого он будет гнуться. Именно такое поведение гвоздя мы наблюдали при снятии экспериментальной зависимости. Чтобы полностью вдавить эталонный гвоздь в бук, нам пришлось на неустойчивом участке (10 – 19 мм) удерживать его плоскогубцами, не давая гнуться.

Подведем главный итог наших исследований. Для забивания гвоздей важна не столько сила, сколько взаимное расположение кривых, соответствующих росту силы сопротивления и силы Эйлера. Если эти кривые пересекаются, гвоздь полностью вбить в дерево с одного удара невозможно, даже если силы в избытке.

[2] *Отметим, что условие неустойчивости Эйлера относится к случаю статических нагрузок. Применение этого условия к динамическим, а тем более к ударным нагрузкам, может претендовать лишь на качественное описание явления и не может дать «исчерпывающий ответ» в количественном смысле. (Прим.ред.)*

Калейдоскоп

Осваивая искусство забивания гвоздей, мы с удивлением обнаружили, что с ним связано множество интересных вопросов и поучительных задач. Мы решили поделиться с читателями некоторыми из обнаруженных нами закономерностей (попробуйте самостоятельно обосновать их).

Итак, знаете ли вы, что...

...гвоздь лишь тогда можно вбить в дерево (т.е. соответствующие кривые не пересекутся), когда его размеры удовлетворяют «условию вбиваемости» $l_0/R < C$, где C — некоторая постоянная, характеризующая породу дерева. Согласно нашим экспериментальным данным, для ели C равно 45,9, для бука — 24,8.

...среди стандартных гвоздей наиболее вбиваемы гвозди малых размеров (рис.9) — начиная с «шестидесяток» всех их можно забить в ель. Среди «соток» вбиваемы в ель лишь достаточно толстые представители, а великану-«двухсотке» следовало бы увеличить свой диаметр почти вдвое. Бук — чрезвычайно твердый материал для стандартных гвоздей, полностью в него можно вбить лишь дюбель.

...легкими постукиваниями гвоздь в дерево не вбить. Для того чтобы гвоздь входил в дерево, а не пружинил, энергия молотка должна превосходить определенную «пороговую» энергию. Например, заключительные удары при забивании стандартного гвоздя в бук должны нести в себе энергию не менее 0,8 Дж.

...если вам удалось забить гвоздь на треть его длины, дальше бейте смело — он не согнется (теорема!).