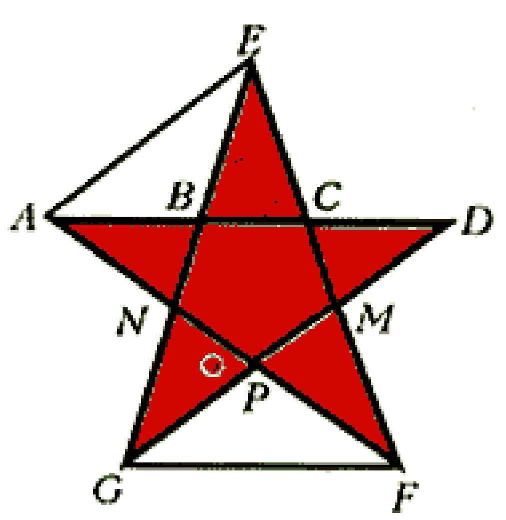
Число Фидия — золотое сечение

Пятиконечная звезда постоянно привлекала внимание людей своим совершенством. Пифагорейцы — ученики школы Пифагора — выбрали в качестве символа своего союза именно эту звезду. Она же считалась у них амулетом здоровья. И сейчас пятиконечная звезда красуется на флагах и гербах многих стран. В чем же ее привлекательность?

Дело в том, что в этой звезде наблюдается удивительное постоянство отношений составляющих ее



отрезков. Взгляните на рисунок. Трудно в это поверить, но

$$AD : AC = AC : CD = AB : BC = \\ = AD : AE = AE : EC.$$

Пользуясь симметрией звезды, этот ряд равенств можно еще очень долго продолжать.

А чему же равно это отношение? Чтобы его найти, обозначим $AD = a$, $AC = b$ и воспользуемся первым равенством. Так как $CD = a - b$, то

из первого равенства отношений следует, что $a : b = b : (a - b)$, или $a^2 - ab - b^2 = 0$. Разделив обе части этого уравнения на b и обозначив $a/b = \Phi$, получим уравнение $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, откуда

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Второй корень этого уравнения отрицателен и нас сейчас не интересует. Часто рассматривают не отношение большего отрезка к меньшему, а обратную к нему величину — отношение меньшего отрезка к большему. Число $1/\Phi$ обозначается буквой φ, оно равно $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$. Отметим, что Φ и φ — прописная и строчная формы греческой буквы «фи». Такое обозначение принято в честь древнегреческого скульптора и архитектора Фидия, жившего в V веке до н.э.

Но вернемся к самим числам

$$\Phi = 1{,}618034\ldots \text{ и } \varphi = 0{,}618034\ldots$$

Вы обратили внимание на то, что приведенные здесь значения чисел Φ и φ отличаются только первой цифрой? Что это — случайность? Удивительно, но и все следующие знаки этих чисел будут совпадать. Этот факт заложен в самом уравнении для числа Φ:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\Phi - 1 = 1/\Phi,$$

откуда видно, что числа Φ и φ различаются ровно на 1.

Если то же уравнение переписать в виде $\Phi^2 = 1 + \Phi$, то, заменяя Φ под корнем на $\sqrt{1+\Phi}$, получим

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}.$$

Продолжая эту процедуру еще и еще раз, и так до бесконечности, получим красивую формулу

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}.$$

А вот еще одна красивая формула для числа Φ:

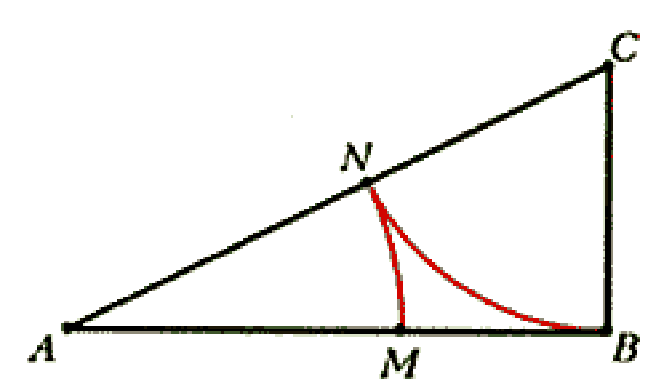
$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

Эта формула получается, если в преобразованном уравнении $\Phi = 1 + 1/\Phi$ заменить Φ в знаменателе на это же выражение:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}},$$

и так далее.

А как разделить отрезок в отношении Φ? Такое построение, производимое циркулем и линейкой, содержится уже в знаменитых «Началах» Евклида, написанных за 300 лет до нашей эры. Процесс построения хорошо виден на рисунке. Сначала к отрезку AB, который мы хотим разделить в отношении Φ, восставляется перпендикуляр BC, длина которого равна половине длины отрезка AB. Затем проводится отрезок AC — гипотенуза треугольника ABC. Далее проводятся две окружности: одна с центром в точке C и радиусом BC, а вторая с



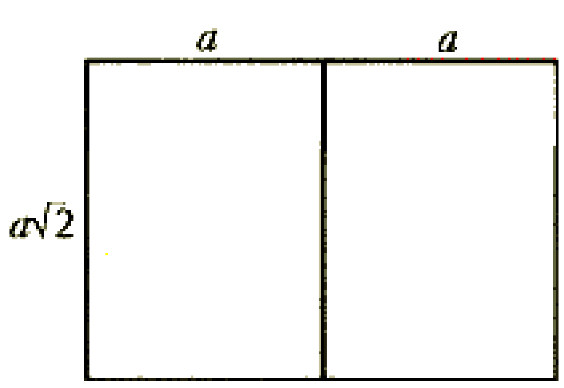
центром в точке A и радиусом AN, где точка N — точка пересечения первой окружности с отрезком AC. Точка M, в которой вторая окружность пересекает отрезок AB, и будет делить отрезок AB в отношении Φ, т.е. $AM : MB = \Phi$.

Пропорция, выражаемая числом

Ф, по мнению многих исследователей, является наиболее приятной для человеческого глаза.

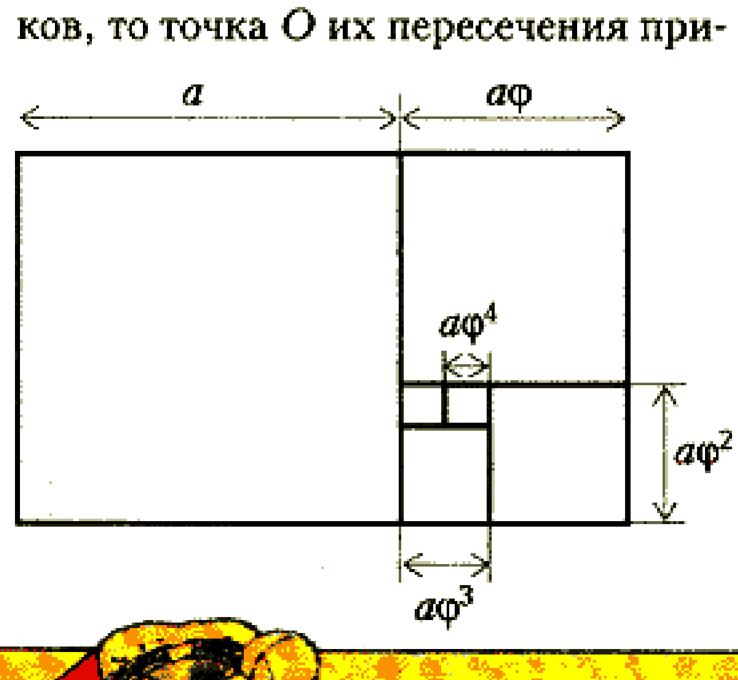
Леонардо да Винчи считал, что идеальные пропорции человеческого тела должны быть связаны с числом Ф. Деление отрезка в отношении Ф он назвал «золотым сечением». В эпоху Возрождения «золотое сечение» было очень популярно среди художников, скульпторов и архитекторов. Размеры картины было принято брать такими, чтобы отношение ширины к высоте равнялось Ф. Этот термин сохранился до наших дней, и само «золотое сечение» по прежнему играет важную роль в искусстве. Им руководствовался, например, великий архитектор Ле Корбюзье.

Прямоугольник с таким отношением сторон стали называть «золотым прямоугольником». Форму «золотого сечения» придавали книгам, столам, почтовым открыткам. В дальнейшем книгам и другим бумажным изделям стали чаще придавать форму прямоугольника с отношением



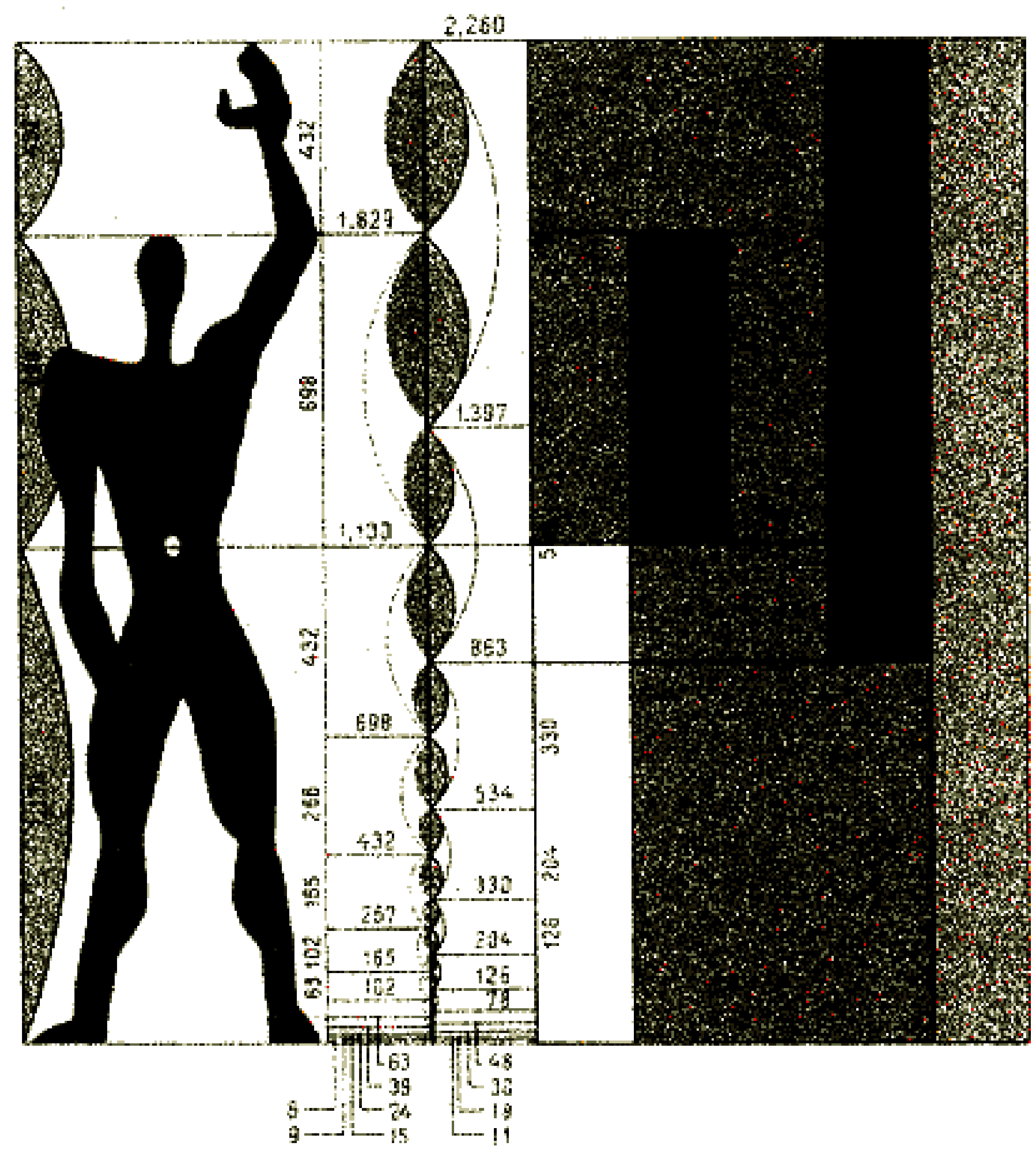
сторон $\sqrt{2}$. Это связано с тем, что при перегибании такого прямоугольника по средней линии образуются два прямоугольника с тем же соотношением сторон.

В этом смысле «золотой прямоугольник» также обладает интересным свойством: если от него отрезать квадрат, то останется вновь «золотой прямоугольник». Этот процесс можно продолжать до бесконечности. А если провести диагонали первого и второго прямоугольников, то точка O их пересечения при-

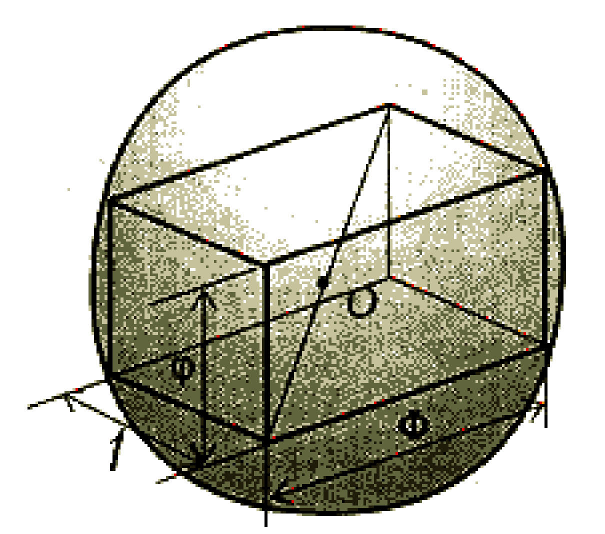


надлежит всем получаемым «золотым прямоугольникам».

Разумеется, есть и «золотой треугольник». На первом рисунке это треугольник GEF. Это — равнобедренный треугольник, у которого отношение длины боковой стороны к длине основания равняется Ф. К числу замечательных свойств этого треугольника, помимо тех, которые вытекают из свойств пентаграммы — пятиугольной звезды, стоит отнести то, что длины биссектрис его углов при основании равны длине самого основания.

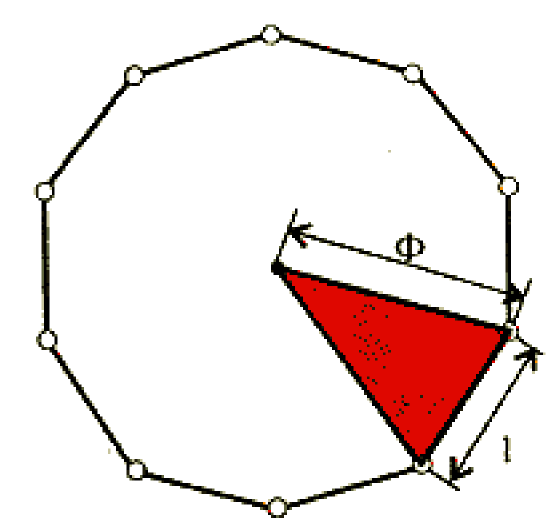


Есть и «золотой кубоид» — это прямоугольный параллелепипед с ребрами, имеющими длины Ф, 1 и φ. Его полная поверхность равна 4Ф, а диагональ равна 2 (проверьте). Отсюда следует, что описанная вокруг него сфера имеет радиус 1, а значит, ее поверхность равна 4π. Поэтому отношение поверхности этой



сферы к поверхности «золотого кубоида» равно $\pi : \Phi$.

Связь между числами π и Ф пытались найти многие математики прежних времен, но их попытки были обречены на провал — эти числа разной природы: Ф — алгебраическое число, а π — трансцендентное. Однако приближенные соотношения найти удалось. Рассмотрите правильный десятиугольник со стороной 1. Нетрудно заметить, что пара соседних его вершин вместе с центром O образует вершины «золотого треугольника», поэтому радиус описанной окружности равен Ф, а ее длина равна $2\Phi\pi$. В то же время периметр этого десятиугольника приближенно (с хорошей точностью)



равен длине этой окружности. Отсюда получаем, что $10 \approx 2\Phi\pi$, т.е. $\pi \approx 3{,}0902$. Еще более точное соотношение дает формула $\pi \approx 1{,}2\Phi^2 = 3{,}1072\ldots$

Число Ф связано и с последовательностью 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., у которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Эта последовательность называется рядом Фибоначчи и возникает во многих практических задачах. Так вот оказывается, что отношение двух соседних членов ряда Фибоначчи в пределе стремится к Ф.

А. Савин