Формула Лейбница

А.ЕГОРОВ

В ПРОШЛОМ номере нашего журнала была опубликована статья А.Котовой «Готфрид Вильгельм Лейбниц». В этой статье упоминалась одна замечательная формула для числа π, доказанная Лейбницем в 1666 году и получившая его имя. Вот она:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots \qquad (1)$$

Здесь мы докажем это и некоторые другие замечательные соотношения.

Геометрическая прогрессия

Рассмотрим сумму

$$S_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}.$$

По известной формуле для суммы первых n членов геометрической прогрессии получаем

$$S_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^n}{1-x}. \qquad (2)$$

Будем считать теперь, что $|x|<1$.

При больших n и фиксированном x выражение $\frac{x^n}{1-x}$ мало по модулю и с ростом n стремится к нулю, так что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1-x}=0$$

при всяком $x\in(-1;1)$.

Мы можем также переписать равенство для $S_n(x)$ несколько иначе:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+\ldots+x^{n-1}+\frac{x^n}{1-x}. \qquad (3)$$

Полученное тождество окажется очень полезным в дальнейшем.

Разглядывая равенство (3), мы приходим к выводу, что точность приближенного равенства

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+\ldots+x^{n-1}=S_n(x)$$

тем выше, чем больше n. Это дает нам основание записать:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

$$\text{при } |x|<1,$$

понимая под бесконечной суммой в правой части предел

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x).$$

Мы представили функцию $\frac{1}{1-x}$ в виде *суммы бесконечного ряда*

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

или, как часто говорят, *разложили эту функцию в ряд* по степеням x (или в степенной ряд).

Для очень широкого класса функций (в частности, для элементарных функций, изучаемых в школе) такие разложения возможны, т.е. возможна запись $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ Некоторые примеры таких разложений мы увидим дальше.

Разложение в ряд функции $\ln(1+x)$

Теперь от читателя потребуется знакомство с натуральными логарифмами и интегралами (впрочем, в пределах школьного курса математики).

Запишем тождество (3), подставив в него $x=-t$:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+$$
$$+t^2-\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}, \qquad (3')$$

и проинтегрируем это тождество по t от 0 до x ($|x|<1$):

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x), \qquad (4)$$

где $R_n(x)=(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}dt$. Иначе говоря (вспомним формулы производной логарифма и Ньютона-Лейбница $\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+t)\big|_0^x=\ln(1+x)$),

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x).$$

Изучим поведение $R_n(x)$ при $n\to\infty$. Поскольку при $0<t\le 1$

$$0<\frac{t^n}{1+t}\le t^n,$$

то и

$$0\le\int_0^x\frac{t^n dt}{1+t}\le\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}\le\frac{1}{n+1}.$$

Поэтому при $0<x\le 1$

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n+1},$$

т.е. при всяком $0<x\le 1$

$$R_n(x)\to 0,$$

что дает нам право записать

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}. \qquad (5)$$

Упражнение 1. Докажите, что и при $-1<x<0$ формула (5) справедлива.

Итак, при всех $-1<x\le 1$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

Мы получили разложение в ряд натурального логарифма. Подставляя $x=1$ в равенство (5), получаем

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \qquad (6)$$

Разложение арктангенса

Подставляя $-t^2$ в формулу (3) вместо x, получаем тождество

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+(-1)^n\frac{t^{2n}}{1+t^2}. \qquad (7)$$

Вспомним теперь формулу для производной арктангенса:

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

Эта формула не доказывается в курсе средней школы, однако вывод ее с помощью формулы производной тангенса или (для знатоков) формулы производной обратной функции не представляет особого труда.

Упражнение 2. Докажите, что $(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

Проинтегрируем равенство (7) от 0 до x:

$$\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x 1dt-$$
$$-\int_0^x t^2dt+\ldots+(-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}dt+$$
$$+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt. \qquad (7')$$

Поскольку, по формуле Ньютона — Лейбница,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^x = \operatorname{arctg} x,$$

получаем тождество

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Оценим $R_n(x)$ так же, как мы поступали, раскладывая в ряд логарифм $(-1 \le x \le 1)$:

$$|R_n(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

Если $|x| \le 1$, то

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{2n+1},$$

т.е. $R_n(x) \to 0$ при всяком x из отрезка $[-1;\,1]$. Мы получили разложение арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1},\ x \in [-1;\,1]. \quad (8)$$

Формула Лейбница

Мы уже знаем, что разложение в ряд арктангенса справедливо и при $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в (8), получаем

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Упражнение 3. Подставьте в формулу (8) какие-нибудь другие числа (вместо x). Какие формулы для числа π вы при этом получите?

Поиски формулы для числа π давали математикам надежду на то, что им удастся решить проблему квадратуры круга. Однако, несмотря на красоту получавшихся формул, никаких сдвигов в проблеме квадратуры не было вплоть до конца XIX века, когда немецкому математику Линдеману удалось доказать, что число π трансцендентно, т.е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами, и, тем самым, построить квадрат, равновеликий данному кругу, нельзя.

И еще одно замечание. Разложение в ряд арктангенса и до Лейбница было известно Грегори — ученику Ньютона, Однако Грегори этот свой результат нигде не публиковал, так что Лейбницу, по-видимому, пришлось самому «открывать» разложение арктангенса.