Геометрические метаморфозы

В.ДУБРОВСКИЙ

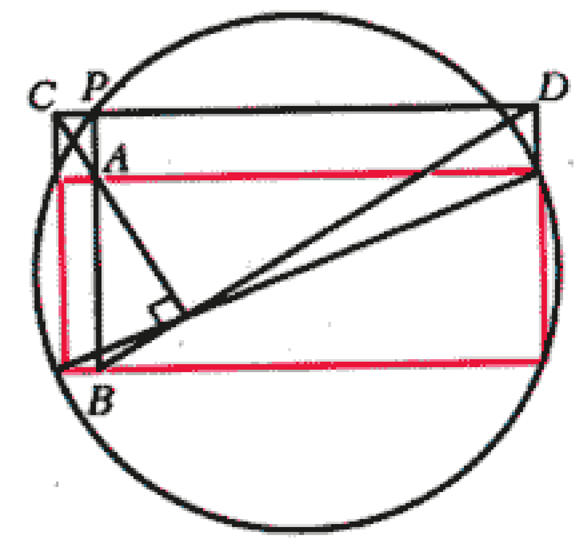

Рис. 1

Дерни за веревочку...
Ш.Перро. «Красная Шапочка»

Однажды, перелистывая старый «Квант», я наткнулся на такую задачу:

M546. *Из произвольной точки P окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры PA и PB на две его противоположные стороны и перпендикуляры PC и PD на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагонали прямоугольника.*

По какой-то уже забытой причине она привлекла мое внимание. И обнаружилось, что эта несколько тяжеловесная по формулировке задача имеет неожиданно много разнообразных решений, использующих целый ворох полезных и поучительных идей. Оказалось также, что оба ее утверждения можно обобщить и прийти к интересным и важным геометрическим теоремам, давно ставшим классикой. На самом деле, эта ситуация достаточно типична для элементарной геометрии — собрания фактов, настолько тесно переплетенных друг с другом, что стоит «потянуть» за один из них, и почти наверняка вслед за ним потянется длинная цепочка других, принадлежащих к, казалось бы, далеким друг от друга областям этой красивейшей области науки (пожалуй, и искусства).

Один из методов, эффективно работающих в этой задаче, хорошо известен в... политике. Он выражается тремя словами: «разделяй и властвуй!». В применении к математике это означает выделение из задачи важных фрагментов, каждый из которых можно исследовать независимо от остальных. В нашем случае такое разделение напрашивается само собой: в задаче имеется два утверждения — о перпендикулярности (прямых AC и BD) и о «конкурентности»[1] (этих же прямых и диагонали прямоугольника). Эти утверждения мы подвергнем серии трансформаций, которые изменят их почти до неузнаваемости, но позволят выделить действительно существенные для их справедливости условия и в то же время «стереть случайные черты». И основным инструментом этих «геометрических преображений» будут — что неудивительно — «геометрические преобразования»: переносы, повороты, гомотетии... Мы увидим, как преобразования (в частности, такое мощное, но нечасто используемое преобразование, как «спиральное подобие») можно применять в доказательстве свойств, которые на первый взгляд не имеют никакого к ним отношения.

Но прежде чем приступить к осуществлению намеченного здесь плана, попробуйте решить нашу задачу самостоятельно. Очень может быть, что вы найдете решение, отличное от приведенных ниже — что ж, тем интереснее вам будет познакомиться с ними.

Начнем с первого утверждения задачи.

Доказательства перпендикулярности

На чертеже задачи (рис.1) масса прямых углов, и едва ли не первое, что приходит в голову — попробовать доказать, что угол между AC и BD равен одному из них.

1. Доказательство сдвигом и симметрией. Обозначим данный прямоугольник через $KLMN$ (рис.2). Отрезки AC и BD — это диагонали прямоугольников $PALC$ и $PDNB$. Их вторые диагонали, PL и PN, перпендикулярны, так как LN, будучи диагональю прямоугольника $KLMN$, является диаметром нашей окружности. А теперь остается заметить, что *если провести по диагонали в каждом из двух произвольных прямоугольников с соответственно параллельными сторонами, то угол между ними равен углу между двумя другими диагоналями* (рис.3,*а*). Это становится очевидным, если параллельно перенести один из прямоугольников так, чтобы его центр совпал с центром второго прямоугольника (рис.3,*б*): при параллельном сдвиге одной из любых двух данных прямых угол между ними не изменяется, а для прямоугольников, полученных после сдвига, рассматриваемые углы равны просто потому, что они симметричны (относительно любой из двух осей симметрии образовавшегося «креста»).

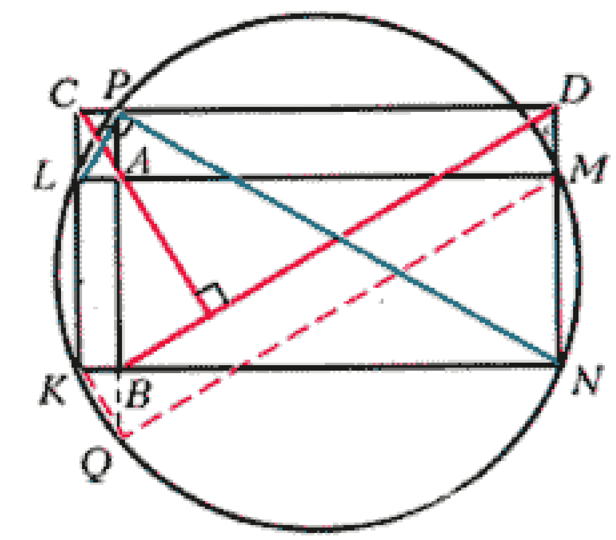

Рис. 2

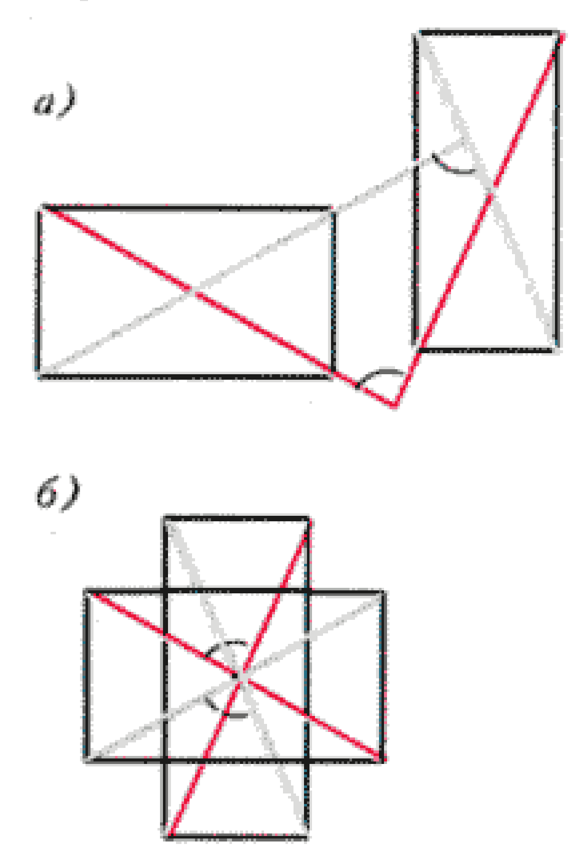

Рис. 3

Эта статья была опубликована в журнале «Квантум» в 1996 году.

[1] *Конкурентными (дословно — «сбегающимися») называют несколько прямых, имеющих общую точку.*

2. Доказательство параллельным переносом. Та же идея сравнения углов используется в следующем рассуждении. Продолжим PA до пересечения с окружностью в точке Q (рис.2). Как и в первом доказательстве, мы видим, что $\angle KQM = \angle KNM = 90°$. Теперь перпендикулярность AC и BD следует из того, что эти прямые соответственно параллельны KQ и QM.

Упражнение 1. Докажите, что прямая AC параллельна KQ, а BD параллельна QM.

Можно сказать, что здесь угол, образованный прямыми AC и BD, совмещается с углом KQM параллельным переносом.

3. Доказательство поворотом и гомотетией. Заметим, что поворот на 90° вокруг P переводит прямые PC, PL и PA в PB, PN и PD соответственно (на рисунке 4 поворот выполняется против часовой стрелки).

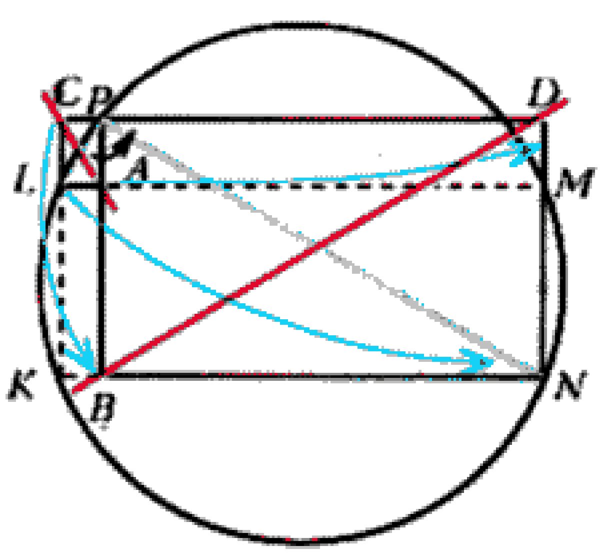

Рис. 4

Это замечание подсказывает еще одно доказательство, в котором отрезок AC переводится непосредственно в BD. Выполним вслед за указанным выше поворотом гомотетию с центром P и коэффициентом PN/PL. В результате двух преобразований, т.е., как говорят, в результате их композиции, точка L, разумеется, перейдет в N. Куда перейдет A? Эту точку можно представить как ортогональную проекцию L на PB; поэтому ее образ — это пересечение прямой PD (образа PB) и перпендикуляра к PD, опущенного из N, образа L (ведь и поворот, и гомотетия, как и любые преобразования подобия, переводят прямые в прямые и сохраняют углы между ними). Следовательно, A переходит в D. Аналогично, C переходит в B. Итак, наше преобразование переводит AC в BD. А поскольку при повороте все прямые поворачиваются на один и тот же угол (в данном случае на 90°), а гомотетия сохраняет направления прямых, прямая BD, образ прямой AC, составляет с AC прямой угол.

В литературе встречаются различные названия для преобразования подобия, представимого как композиция поворота и гомотетии с общим центром[2]. Мы примем термин *спиральное подобие*, предложенный Г.С.М.Коксетером и С.Л.Грейтцером в их замечательной книжке «Новые встречи с геометрией» (М., «Наука», 1978); другие названия — «поворотная гомотетия» и «центрально-подобное вращение». При спиральном подобии все прямые поворачиваются на один и тот же угол — это свойство было использовано в нашем третьем доказательстве. Другое его свойство нам понадобится ниже в одном из доказательств второго утверждения задачи.

Теорема Брахмагупты

Как мы видели (см. упражнение 1), прямая QM на рисунке 2 параллельна BD. Это наблюдение позволяет облечь первое утверждение нашей задачи в более изящную форму, известную как теорема Брахмагупты:

Если диагонали четырехугольника, вписанного в окружность, перпендикулярны, то перпендикуляр к стороне четырехугольника, проведенный через точку их пересечения, делит пополам противоположную сторону.

Точнее говоря, наше утверждение равносильно обратной теореме, которая моментально выводится из прямой доказательством «от противного» — если рассматриваемая в ней прямая (на рисунке 5 это прямая AE) делит пополам какую-то сторону четырехугольника (сторону PL четырехугольника $PLQM$), то она перпендикулярна к противоположной стороне (QM).

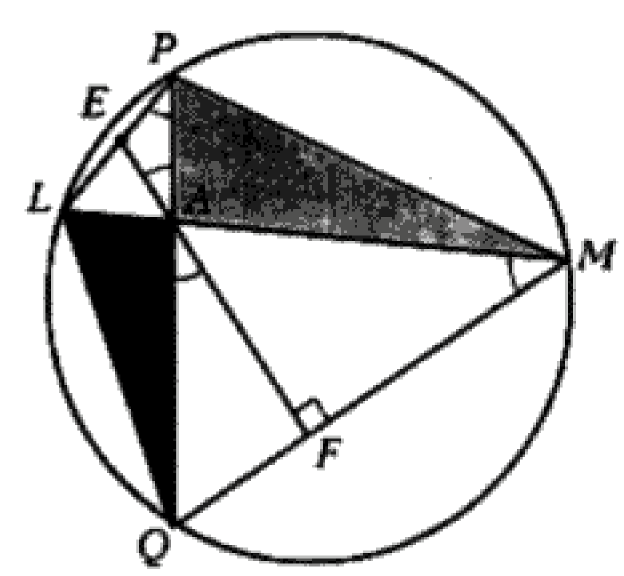

Рис. 5

Вы можете доказать эту теорему непосредственно, например, установив равенство четырех углов, отмеченных дужками на рисунке 5, или приспособить одно из доказательств, рассмотренных выше. Сейчас же мы сразу перейдем к ее красивому обобщению.

[2] *Заметим, кстати, что любое преобразование подобия плоскости, сохраняющее ориентацию и отличное от параллельного переноса, можно представить именно в таком виде.*

Представим, что треугольники AQL и AMP на рисунке 5 соединены в их общей вершине A шарниром. Повернем один из треугольников относительно другого (рис.6). Оказывается, что при этом утверждение теоремы Брахмагупты (для сторон PL и QM) останется в силе. Другими словами, *если при соединении точки A, взятой внутри четырехугольника $LPMQ$, с его вершинами образуются подобные прямоугольные треугольники ALQ и APM (с равными углами при L и P и при A, причем углы при A прямые), то перпендикуляр, опущенный из A на QM, при продолжении делит LP пополам.*

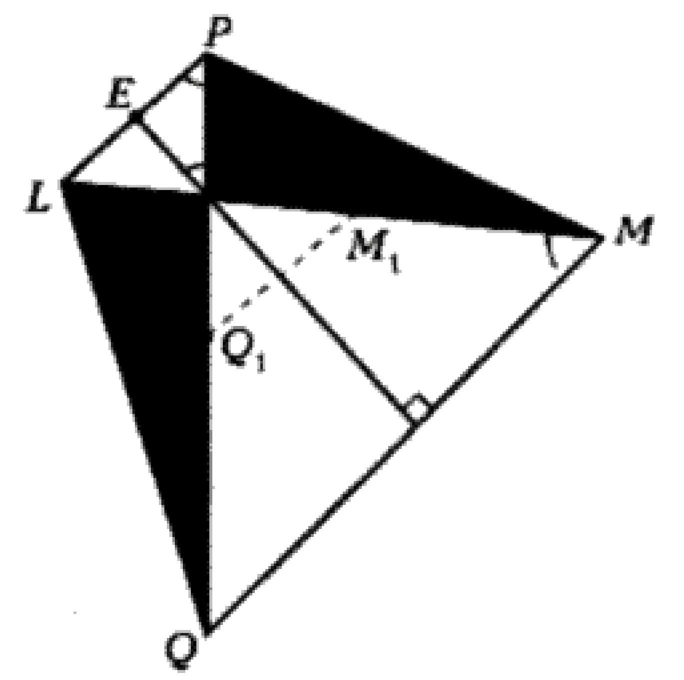

Рис. 6

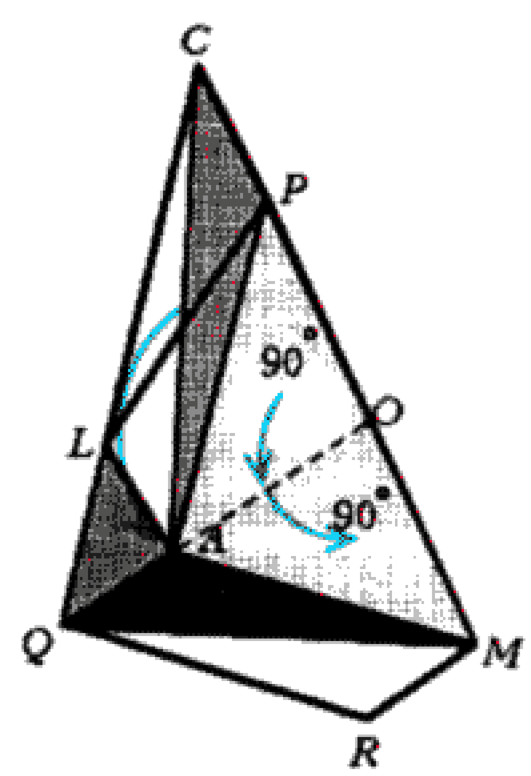

Рис. 7

В частном случае, когда подобные треугольники, о которых здесь говорится, являются прямоугольными равнобедренными, этот факт хорошо известен. Его можно доказать так: достраиваем треугольники ALP и AQM до параллелограммов $ALCP$ и $AQRM$ (рис.7) и убеждаемся, что при повороте на 90° вокруг середины PM первый параллелограмм переходит во второй; при этом CA переходит в QM и, стало быть, $CA \perp QM$ (детали оставляются читателю). Общий же случай сводится к этому частному: достаточно отложить на AQ и AM отрезки AQ_1 и AM_1, равные AL и AP соответственно (рис.6), и заметить, что в силу подобия треугольников ALQ и APM прямые QM и Q_1M_1 параллельны ($AQ/AQ_1 = AM/AM_1$), а к четырехугольнику Q_1M_1PL можно применить указанный частный случай.

Справедлив и еще более общий результат с произвольными (не обязательно прямыми) углами (см. задачу М1505).

Доказательства конкуррентности

Обратимся к доказательствам второго утверждения нашей задачи – о том, что прямые AC и BD пересекаются на диагонали (на наших рисунках – KM) данного прямоугольника.

1. Доказательство с помощью описанных окружностей. Одно из первых неписаных правил решения геометрических задач состоит в том, что если у вас есть несколько прямых углов, опирающихся на один отрезок, то нужно построить на нем как на диаметре окружность (она пройдет через вершины всех этих углов). И наша задача – не исключение.

Пусть AC и BD пересекаются в точке J (рис.8). Покажем, что отрезки JK и

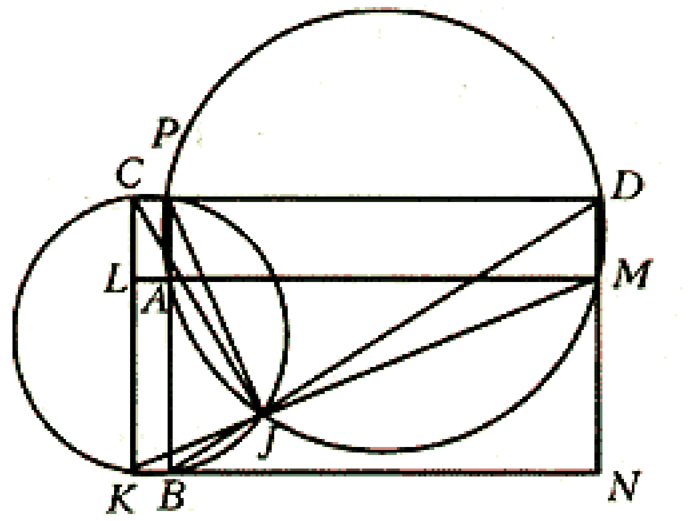

Рис. 8

JM образуют одну прямую. Мы уже доказали в первой части, что $\angle BJC = 90°$, т.е. J лежит на описанной окружности прямоугольника $PBKC$ так, что угол PJK тоже прямой. Аналогично, J лежит на описанной окружности прямоугольника $PAMD$, и потому $\angle PJM = 90°$, а значит, угол KJM – развернутый.

2. Доказательство с помощью спирального подобия пересекающихся окружностей. Мы уже использовали спиральное подобие в третьем доказательстве перпендикулярности. Гораздо менее очевидным образом этот вид преобразований, точнее, одно его очень полезное свойство, можно использовать для прямого, без использования перпендикулярности AC и BD, доказательства конкуррентности. Вот это свойство:

Допустим, что при спиральном подобии S с центром в точке A на данной окружности ω_1 эта окружность переходит в окружность ω_2. Тогда прямая, соединяющая произвольную точку X_1 на ω_1 с ее образом $X_2 = S(X_1)$ на ω_2, всегда проходит через вторую точку пересечения окружностей B (рис.9).

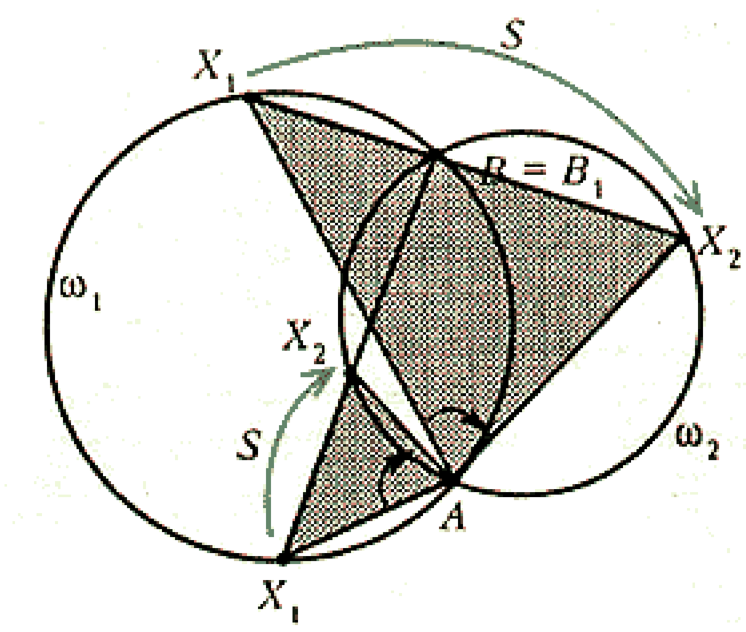

Рис. 9

Для доказательства заметим, что, по определению спирального подобия, во всех треугольниках AX_1X_2, где $X_2 = S(X_1)$ – образ X_1 при преобразовании S (см. рис.9, на котором показаны два примера таких треугольников), одинаковы угол при вершине A – он равен углу поворота – и отношение сторон AX_2/AX_1, равное коэффициенту этого подобия. Следовательно, эти треугольники подобны между собой и, в частности, имеют постоянный угол при вершине X_1. Если точка X_1 берется на окружности ω_1, то этот угол будет вписанным в нее [3], и значит, высекает на ней дугу AB_1 постоянной величины. Другими словами, прямая X_1X_2 пересекает окружность ω_1 в фиксированной точке B_1. Аналогично, и точка B_2 ее пересечения с окружностью ω_2 фиксирована (потому что угол AX_2X_1, вписанный в ω_2, также постоянен). А так как обе эти точки принадлежат *всем* прямым X_1X_2, они совпадают и лежат

[3]*Строго говоря, это верно только для точек на ω_1, но вне ω_2. Если точка X_1 окажется внутри ω_2 (рис.10), то угол AX_1X_2 будет смежным с вписанным углом. Впрочем, на справедливости дальнейших выводов это не сказывается. Нам не пришлось бы рассматривать разные случаи, если бы мы воспользовались здесь ориентированными углами.*

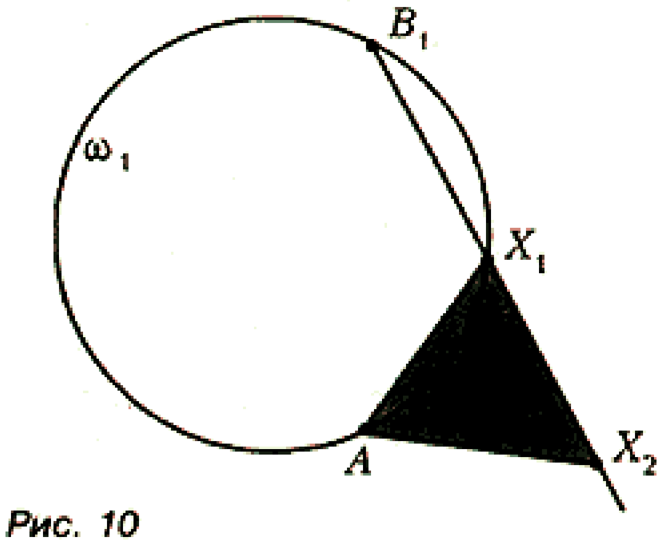

Рис. 10

одновременно на ω_1 и ω_2, т.е. $B_1 = B_2 = B$.

Вернемся к нашей задаче (рис.8). Замечаем, что точно так же, как и в третьем доказательстве перпендикулярности, прямоугольник $PCKB$ можно перевести в $PAMD$ спиральным подобием с центром P и углом поворота 90°. А теперь остается применить только что доказанное свойство к этому спиральному подобию, описанным окружностям прямоугольников, точкам C, K, B и их образам A, M, D: мы сразу получаем, что прямые CA, KM и BD проходят через общую точку J ($\neq P$) этих окружностей, что и требуется.

Прежде, чем двинуться дальше, познакомьтесь еще с несколькими примерами применения рассмотренного свойства.

Упражнения

2. Прямая, проходящая через точку P пересечения двух окружностей, пересекает их вторично в точках A и B. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

3. В условиях предыдущего упражнения проведем через A и B касательные к окружностям, на которых эти точки лежат. Докажите, что точка пересечения касательных, точки A и B, а также точка пересечения окружностей, отличная от P, лежат на одной окружности.

На самом деле это свойство отлично «работает» во многих задачах с пересекающимися окружностями. Сейчас мы убедимся в этом еще раз, доказав классическую теорему, которая позволит взглянуть на нашу исходную задачу с новой точки зрения.

Прямые Симсона

Теорема, о которой идет речь, была доказана У.Валлисом (так по традиции пишут фамилию *Wallace*, принадлежащую известному английскому математику) в 1797 году. Однако, как это очень часто случается в математике, ее ошибочно приписали Р.Симсону. Она утверждает, что

проекции точки P, взятой на описанной окружности треугольника ABC, *на его стороны (или их продолжения) лежат на одной прямой.*

Эта прямая называется прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC.

Доказательство иллюстрирует рисунок 11, на котором проекции точки P на

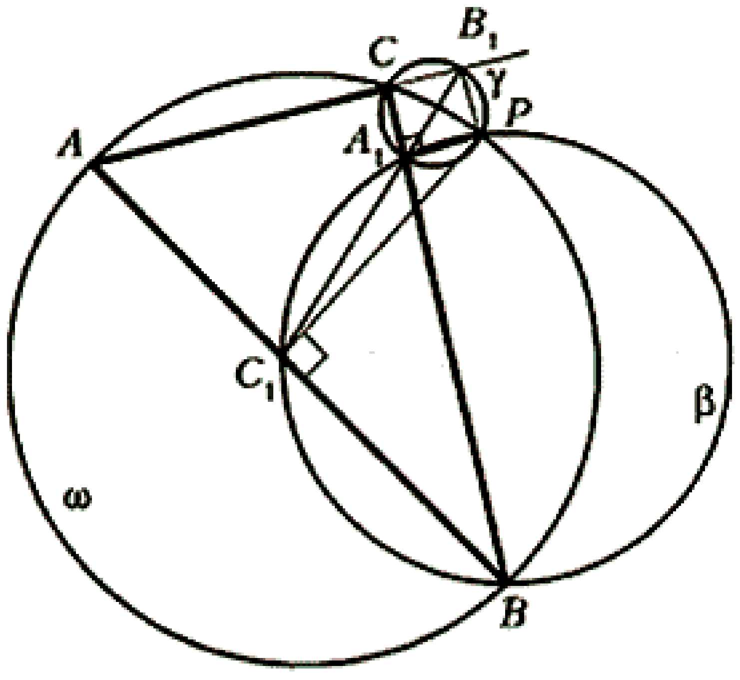

Рис. 11

описанной окружности ω треугольника ABC на его стороны обозначены, соответственно, A_1, B_1 и C_1. Построим на отрезках PB и PC как на диаметрах окружности β (которая пройдет через A_1 и C_1) и γ (которая пройдет через A_1 и B_1). Теперь выполним последовательно спиральное подобие S_1 с центром P, переводящее β в ω, а затем спиральное подобие S_2 с тем же центром, переводящее ω в γ.

Ясно, что в результате мы получим спиральное подобие S с центром P, переводящее β в γ. Посмотрим, что происходит с точкой C_1 при этом преобразовании. По доказанному нами свойству, преобразование S_1 переводит ее во вторую точку пересечения прямой BC_1 с ω — т.е. в A. Аналогично, $S_2(A) = B_1$. Таким образом, $S(C_1) = B_1$, а значит C_1B_1 проходит через точку пересечения β и γ, отличную от P, т.е. через A_1, и мы доказали, что три проекции лежат на одной прямой.

А сейчас снова посмотрим на чертеж нашей исходной задачи (рис.8). По условию точка P лежит на общей описанной окружности треугольников KLM и MNK. Очевидно, ее прямая Симсона относительно первого треугольника — это AC, а относительно второго — BD. Поэтому обе эти прямые проходят через проекцию J точки P на общую сторону KM этих треугольников, что и доказывает второе утверждение задачи.

Интересно, что и первое утверждение (о перпендикулярности) тоже можно получить с помощью прямых Симсона, хотя и не столь изящно, как второе. Замечаем, что при симметрии относительно центра данной окружности треугольник MNK переходит в треугольник KLM, а точка P — в диаметрально противоположную точку P'; значит, прямая BD переходит в прямую Симсона l точки P' относительно треугольника KLM. Таким образом, эти две прямые параллельны. С другой стороны, можно доказать (попробуйте!), что угол между прямыми Симсона двух точек P и P' относительно одного и того же треугольника равен половине угловой величины дуги PP' его описанной окружности. В нашем случае эта дуга есть полуокружность, т.е. соответствующие прямые Симсона (точек P и P' относительно треугольника KLM) перпендикулярны: $AC \perp l$. А так как l параллельна BD, получаем, что $AC \perp BD$.

Теорема Паппа

Мы видели, что первое утверждение нашей задачи можно существенно расширить. Второе утверждение допускает еще более впечатляющее обобщение. Оказывается, что оно остается справедливым без всяких прямых углов и окружностей. Существенно лишь то, что на чертеже имеются *две пересекающиеся тройки параллельных прямых.*

Они образуют несколько параллелограммов (а кстати, сколько?). Выберем любые три параллелограмма так, чтобы каждые два из них имели ровно одну общую вершину. Другими словами, выберем из девяти точек пересечения наших прямых три так, чтобы на каждой прямой была выбрана ровно одна точка — эти три точки и есть общие вершины выбираемых параллелограммов, а стороны образованного ими треугольника (красный треугольник на рисунке 12) являются их диагоналями.

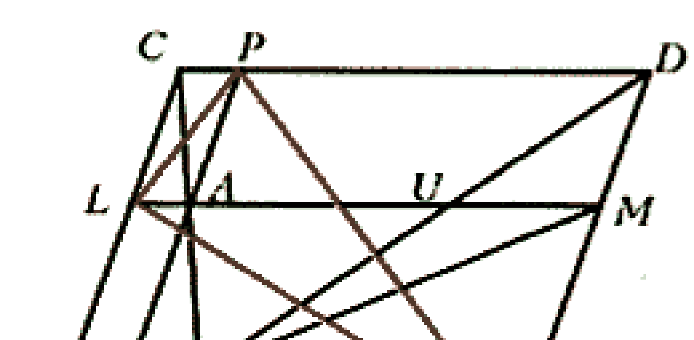

Рис. 12

Тогда три другие диагонали параллелограммов (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

(Контрольный вопрос: сколькими способами можно выделить «красный треугольник» на нашем рисунке?)

Докажем эту теорему для параллелограммов $ALCP$, $BPDN$ и $KLMN$ на рисунке 12 (эти обозначения отвечают исходной задаче). Естественно, это доказательство, после соответствующей смены обозначений, будет верным и при любом другом выборе тройки параллелограммов.

Мы должны доказать, что прямые KM, CA и BD пересекаются в одной точке или что BD проходит через точку J, в которой пересекаются прямые KM и CA. Обозначим через U и V точки пересечения прямых BD и LM, CA и KN, соответственно. Из подобия треугольников ALC и VBA и равенства противоположных сторон параллелограммов получаем равенства

$$\frac{KB}{BV} = \frac{LA}{BV} = \frac{CL}{AB} = \frac{PA}{AB}.$$

Из подобия треугольников UBA и UDM получаем

$$\frac{MU}{UA} = \frac{DM}{AB} = \frac{PA}{AB},$$

поэтому $KB/BV = MU/UA$. Отсюда и следует, что прямая $BU = BD$ проходит через J. (Действительно, треугольники KJV и MJA гомотетичны относительно J, значит, точки B и U, делящие отрезки KV и MA в одинаковом отношении, являются соответственными при гомотетии с центром J, т.е. лежат на прямой, проходящей через J.)

Упражнение 4. Докажите, что середины диагоналей четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон, лежат на одной прямой. (Эта прямая называется прямой Гаусса.)

А теперь я хочу поделиться одним секретом геометрической «кухни» и объяснить, как можно было догадаться, что условия утверждения о конкурентности можно ослабить, избавившись в них от всяческих перпендикулярностей. Здесь опять помогают преобразования, но уже другого рода.

Представим, что чертеж к нашей задаче (рис.1) нарисован на прозрачной плоскости, и рассмотрим тень, отбрасываемую им на другую плоскость при освещении пучком параллельных лучей. Иначе говоря, параллельно спроектируем его на другую плоскость. Известно (и, в сущности, очевидно), что проекция прямой есть прямая [4] и что параллельная проекция сохраняет параллельность прямых. С другой стороны, такие объекты, как прямые углы или окружности, при параллельной проекции, вообще говоря, не сохраня-

[4] *Если только эта прямая не параллельна направлению проекции.*

ются; например, из окружностей получаются эллипсы. Таким образом, ни перпендикуляров, ни описанной окружности после проекции на чертеже не будет, да и прямоугольника, вокруг которою она была описана, не останется — он превратится в параллелограмм. Однако прямые AC, BD и KM по-прежнему будут пересекаться в одной точке, а все в целом будет выглядеть примерно как рисунок 12. Более того, можно показать, что любые две пересекающиеся тройки параллельных прямых можно представить как проекцию соответствующих прямых с чертежа нашей задачи. В этом смысле второе утверждение задачи и доказанный выше более общий факт равносильны.

Итак, параллельная проекция позволила нам выделить свойства рассматриваемой картинки, «отвечающие» за конкуррентность. Можно пойти дальше и подвергнуть чертеж еще более существенному искажению, производимому *центральной проекцией*, заменив параллельный пучок света пучком лучей от точечного источника. Центральная проекция, как и параллельная, сохраняет коллинеарность точек, однако, вообще говоря, не сохраняет параллельность: совокупность нескольких параллельных между собой прямых превращается в набор прямых, проходящих через одну и ту же точку (рис.13). Таким образом, в результате центральной проекции конфигурация, изображенная на рисунке 12, превратится в нечто вроде того, что изображено на рисунке 14, а соответствующее утверждение о конкуррентных диагоналях параллелограммов — в следующую теорему:

Пусть a, b, c и a', b', c' — две тройки конкуррентных прямых. Тогда три прямые, соединяющие попарно точки пересечения прямых $a \cap b'$ и $a' \cap b$, $b \cap c'$ и $b' \cap c$, $c \cap a'$ и $c' \cap a$, конкуррентны (пересекаются в одной точке).

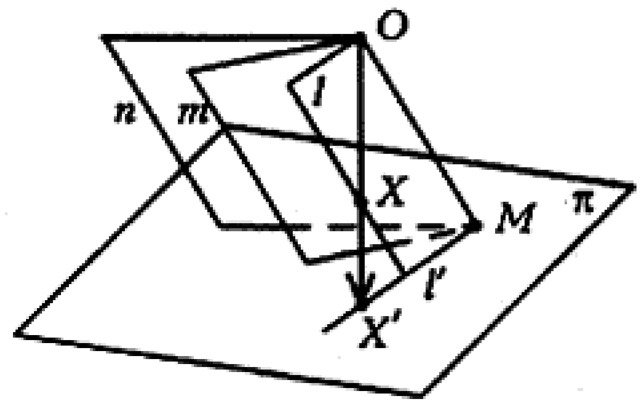

Рис. 13. Проекция из центра O на π плоскость переводит точку X в X', а прямую l, проходящую через X, в $l' = X'M$, где M — такая точка плоскости, что OM параллельна l. Центральные проекции прямых n и m, параллельных l, также проходят через M.

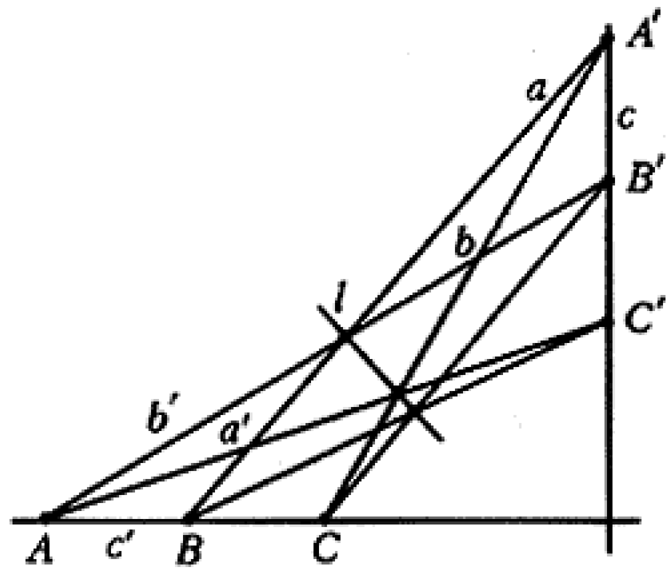

Рис. 14

Интересно, что эта теорема равносильна утверждению, которое получается из нее заменой слов «прямая» и «точка», «конкуррентность» и «коллинеарность» друг на друга:

Пусть A, B, C и A', B', C' — две тройки коллинеарных точек. Тогда три точки пересечения пар прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ коллинеарны (т.е. лежат на одной прямой).

Этот факт является одной из фундаментальных теорем геометрии (точнее говоря, проективной геометрии); он называется *теоремой Паппа*.

Два утверждения о точках и прямых, которые, подобно последним, получаются одно из другого перестановкой этих двух понятий, называются *двойственными* друг другу. В проективной геометрии, которая изучает свойства, сохраняющиеся при центральной проекции, утверждение, двойственное к верному, всегда само верно.

Упражнение 5. Покажите, что теорема Паппа и двойственное к ней утверждение являются просто переформулировками друг друга. Расставьте обозначения на рисунке 14 в соответствии с рисунком 12 и попробуйте разобраться, как теорема о конкуррентных диагоналях параллелограмма получается из теоремы, двойственной к теореме Паппа.

Не будем доказывать теорему Паппа отдельно. Одно из доказательств состоит в том, чтобы перейти от рисунка 14 обратно к рисунку 12 с помощью подходящей центральной проекции: ее можно выбрать так, чтобы «отправить точки A и A' на бесконечность», т.е. превратить прямые, сходящиеся в этих точках, в параллельные. Можно «отправить на бесконечность» и другие элементы чертежа (например, прямую $A'B'$ или прямую l) и таким образом свести теорему к одному из ее, как говорят, «аффинных вариантов». Эти варианты весьма разнообразны и не похожи один на другой. Любителям геометрии безусловно доставит удовольствие их исследование. С этим полезным занятием автор и оставляет читателя, хотя, упомянув теорему Паппа, он получил прекрасный повод продолжать этот рассказ дальше и дальше...