одно уравнение из другого, получим

$$p_н \Delta V + p_н \cdot 0{,}001 V_0 = \frac{m_2 - m_1}{M} RT_0 .$$

Пренебрегая вторым членом в левой части этого уравнения и учитывая, что $m_2 - m_1 = m_в$, где $m_в$ — масса воды, получим

$$m_в \approx \frac{Mp_н \Delta V}{RT_0} = \frac{MA}{RT_0} = 10^{-3} \text{ кг}.$$

Отсюда можно найти объем цилиндра:

$$V_0 = \frac{m_в}{\rho_в \cdot 0{,}001} = 1 \text{ л}$$

и массу пара в исходном состоянии:

$$m_1 = \frac{Mp_н(V_0 - 0{,}001V_0)}{RT_0} \approx \frac{Mp_н V_0}{RT_0} = \frac{MAV_0}{RT_0 \Delta V} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ кг}.$$

3. Сразу после замыкания ключа разность потенциалов на конденсаторе емкостью C_0 равна нулю, а падение напряжения на резисторе равно $\mathcal{E}$. Поэтому ток в цепи сразу после замыкания ключа будет

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

В произвольный момент времени t (после замыкания ключа) напряжение на конденсаторе будет равно

$$U_C = \frac{q(t)}{C(t)} = \mathcal{E} - I(t)R .$$

Пусть через время t_0 ток в цепи достигает значения $I_0 = \Delta q / \Delta t$ и в дальнейшем остается постоянным. Следовательно, изменение заряда на конденсаторе равно

$$\Delta q = I_0 \Delta t ,$$

а заряд на конденсаторе изменяется со временем (при $t > t_0$) по закону

$$q_C(t) = q_0 + I_0(t - t_0) = (\mathcal{E} - I_0 R) C(t) .$$

Чтобы ток оставался постоянным, необходимо изменять емкость по закону

$$C(t) = \frac{q_0}{\mathcal{E} - I_0 R} + \frac{I_0 (t - t_0)}{\mathcal{E} - I_0 R} .$$

Поскольку при $t \le t_0$

$$C(t) = C_0 , \text{ или } C_0 = \frac{q_0}{\mathcal{E} - I_0 R},$$

окончательно для зависимости емкости конденсатора от времени получаем

$$C(t) = C_0 + \frac{I_0}{\mathcal{E} - I_0 R}(t - t_0) \text{ при } t \ge t_0 .$$

4. Так как показатель преломления в нашем случае зависит только от координаты y, среду можно считать плоскослоистой. Если луч света проходит такую среду насквозь, то можно показать, что угол входа α (угол падения) и угол выхода β (угол преломления) связаны соотношением

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n(H)}{n(0)},$$

где $n(0)$ — показатель преломления среды на входе луча, а $n(H)$ — показатель преломления на выходе луча. В том случае, когда луч не проходит среду насквозь, а испытывает полное внутреннее отражение на некотором расстоянии h от плоскости входа, для угла падения α_0 получаем

$$\sin\alpha_0 = \frac{n(h)}{n(0)},$$

где $n(h)$ — показатель преломления среды на глубине h. Используя заданную зависимость показателя преломления $n(y)$, получим

$$h = \frac{n_0}{k}(1 - \sin\alpha_0) = 1 \text{ м}.$$

5. Будем рассматривать движение заряженной частицы в системе координат XY, где ось X направлена вдоль скорости $\vec{v}_0$, а ось Y — вдоль вектора $\vec{E}$ (рис.16). Уравнение движения частицы вдоль оси X имеет вид

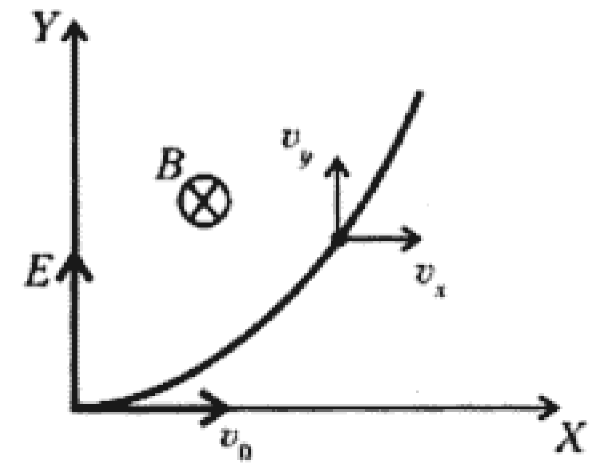

Рис. 16

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -qBv_y ,$$

или

$$\Delta v_x = -\frac{qB}{m} v_y \Delta t = -\omega_0 v_y \Delta t ,$$

где ω_0 — так называемая циклотронная частота. Поскольку $v_y \Delta t = \Delta y$, то $\Delta v_x = -\omega_0 \Delta y$. Отсюда

$$\int_{v_0}^{v_x} \Delta v_x = -\omega_0 \int_0^y \Delta y , \text{ или } v_x = v_0 - \omega y .$$

Закон сохранения энергии позволяет записать

$$\frac{mv_0^2}{2} + qEy = \frac{mv_x^2}{2} .$$

Из совместного решения двух уравнений (исключая y) получим квадратное уравнение относительно v_x:

$$v_x^2 + 2v_0 v_x - 3v_0^2 = 0 ,$$

откуда окончательно находим

$$v_x = -v_0 - \sqrt{v_0^2 + 3v_0^2} = -3v_0 .$$

Вариант 2

1. $v_0 = g\tau/2$. **2.** $\rho = \dfrac{Mmg_В}{4\pi R_В^2 RT} = 6{,}6 \text{ кг/м}^3$.

3. $Q_2 = Q_1 R_1/R_2$; $\mathcal{E} = \sqrt{2Q_1(R_1 + R_2)/(LR_1)}R_3$.

4. $\sigma_x = \dfrac{2\varepsilon_0(1-\alpha)^2 mg}{\alpha^2 q}$. **5.** $\alpha = \arccos\dfrac{2a + \Delta l}{Da(a + \Delta l)} = \arccos 0{,}9$.

Вариант 3

1. $\Delta V = 2R\Delta T/p_0 = 16{,}6 \cdot 10^{-3}$ л; $T = \Delta T/\alpha = 400$ К.

2. $v_1 = 2\sqrt{gH}$; $v_2 = \sqrt{10gH/3}$.

3. $M = \rho_в d^3(1 - \pi/4)\left(1 - m/(\rho_в d^3)\right) = 160$ г;

$\rho = \rho_в - m/d^3 = 0{,}75$ г/см^3.

4. $a = v_0 l^2 B^2/(MR)$. **5.** $\lambda_0 = \dfrac{\beta - \alpha}{\beta - 1}\dfrac{hc}{A} = 0{,}33$ мкм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 60 км/ч. **2.** $\frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.** 1; $\log_2 2/5$.

4. 2048. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что высота пирамиды — ребро SC — равна удвоенному расстоянию от центра описанной сферы до плоскости ABC.

5. $[-2; 1/4]$. *Указание.* Сложив неравенства системы, получим после преобразований неравенство $(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \le (1 - 4a)/2$ (*), решения которого образуют при $a \le 1/4$ круг с центром в точке $(1/2; 1/2)$ и радиусом $\sqrt{(1-4a)/2}$ (при $a = 1/4$ круг превращается в точку, а при $a > 1/4$ решений нет).

Наиболее удаленной от начала координат точкой круга явля-