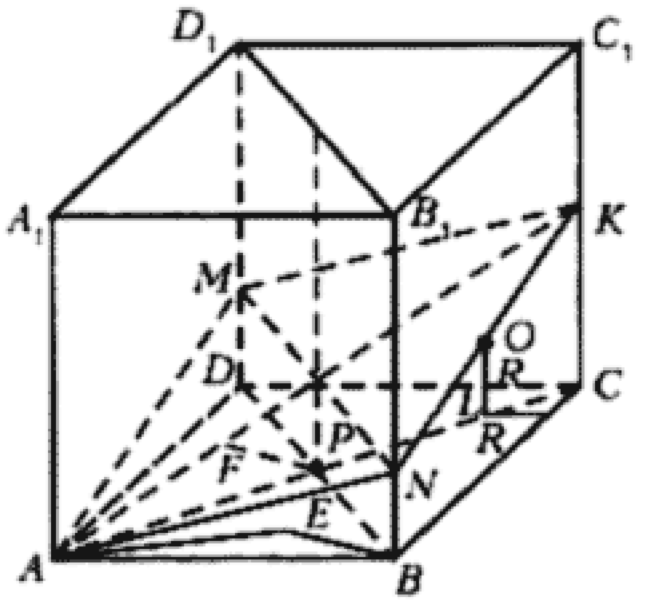

Рис. 10

описанной окружности. По теореме синусов $R = AB/(2\sin 2\alpha)$.

5. $S_{AMKN} = 2a^2/\sqrt{3}$, $R = a\sqrt{2}/\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$. Пусть M, K, N — (соответственно) точки пересечения ребер DD_1, CC_1, BB_1 с искомым сечением (рис.10). Пусть, далее, BE — перпендикуляр к плоскости сечения. Тогда из треугольника AEB имеем $EB = a\sqrt{2}/4$, так как $\angle BAE = \arcsin\sqrt{2}/4$ и $AD = a$. Из точки P пересечения диагоналей AC и BD опустим перпендикуляр PF на AK, тогда $PF = BE$ ($BD \parallel ANM$). Из треугольника APF получим

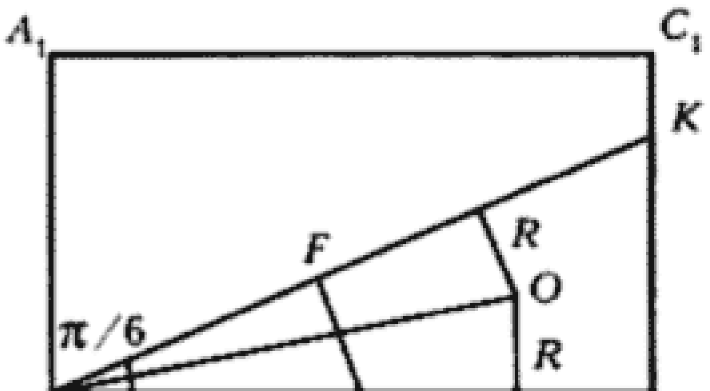

Рис. 11

($AP = a\sqrt{2}/2$) $\angle PAF = \pi/6$, т.е. $AK = AC/\cos(\pi/6) = 2\sqrt{6}a/3$ $S_{AMKN} = (AK \cdot MN)/2 = 2a^2\sqrt{3}/3$. Осталось найти радиус R вписанного шара, центр которого O лежит на биссектрисе угла KAC. Точка L (проекция O на ABC, рис.10, 11) лежит на AC. Поскольку при этом $LC = R\sqrt{2}$ и $AL = R\,\mathrm{ctg}(\pi/12)$, из равенства $AC = AL + LC$ получим $R\left(\mathrm{ctg}(\pi/12)+\sqrt{2}\right) = a\sqrt{2}$, $\mathrm{ctg}(\pi/12) = \left(1+\cos(\pi/6)\right)/\sin(\pi/6) =$ [illegible] $\sqrt{3}$.

Вариант 3

1. $x = 9$. ***Указание.*** Выполните подставновку: $t = x - 2\sqrt{x}$.

2. $x = -\pi/4 + (-1)^k \pi/12 + \pi k/2 + \pi n$,

$y = -\pi/4 - (-1)^k \pi/12 - \pi k/2 + \pi n,\ n \in Z$.

Указание. Решите систему относительно $\cos x \sin y$, $\sin x \cos y$, а затем вычислите $\sin(x-y)$, $\sin(x+y)$.

3. $7/6$. Пусть R, a, x — радиус окружности, сторона ромба и длина стороны треугольника (рис.12, 13). Обозначим острый угол ромба через 2α, тогда $2R = a\sin 2\alpha$. Так как две стороны треугольника параллельны диагоналям ромба, то этот треугольник прямоугольный, а из параллельности

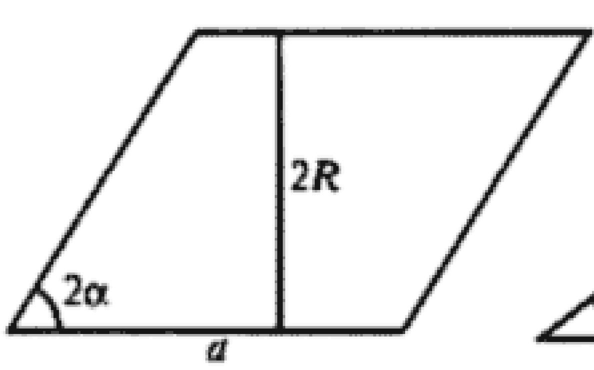

Рис. 12

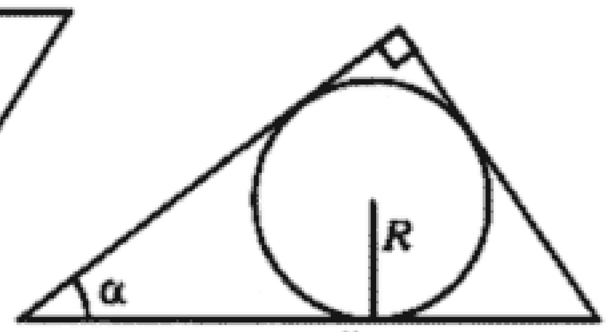

Рис. 13

третьей стороны треугольника стороне ромба следует, что один из углов этого треугольника равен α. Формула $S = pR = x^2\sin\alpha\cos\alpha/2$ дает второе уравнение $R(1+\cos\alpha+\sin\alpha) = x\sin\alpha\cos\alpha$. Откуда $R = x^2/2a - x$.

4. 18, $73/6$. Так как указанные в условии числа равны длинам сторон треугольника, то эти числа положительны и удовлетворяют неравенству треугольника: $3x > 0$, $2y > 0$, $9 - y > 0$, $3x + 2y > 9 - y$, $3x + 9 - y > 2y$, $2y + 9 - y > 3x$. Фигура $M = \{y < x + 3,\ y > 3 - x,\ y > 3x - 9\}$ — треугольник с вершинами $(0; 3)$, $(3; 0)$, $(6; 9)$. Второе условие задачи дает неравенство (отрицательность дискриминанта данного в условии квадратного трехчлена): $y < 3 + 4x - x^2$. Площади фигур (рис.14) вычисляются стандартным образом.

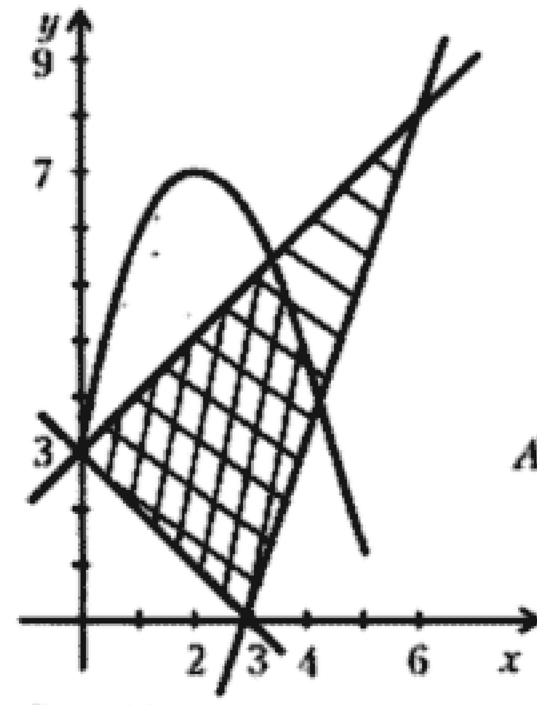

Рис. 14

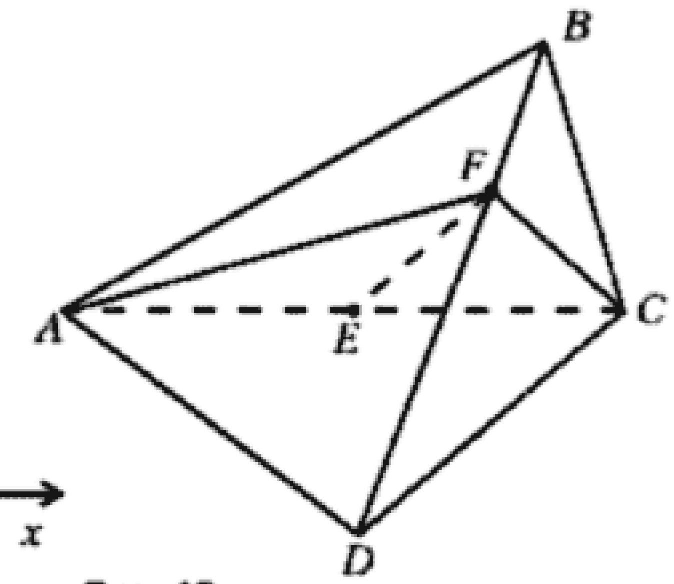

Рис. 15

5. a, $\pi/4$, $\pi/4$. Пусть прямая AF (рис.15) перпендикулярна BD, тогда прямая BD перпендикулярна плоскости ACF (BD перпендикулярна прямой AF по построению, а прямой AC по условию). Итак, EF — медиана и биссектриса треугольника AFC, поэтому $AF = FC$ и $AD = DC = a$. По условию угол ACF равен $\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right)$; $AE = AF\cos\angle ACF = AD\cos\angle CAD$, $AF = AD\sin\angle ADF$ и $\cos\angle CAD = \cos\angle ACF\sin\angle ADF = \sqrt{2/3}\,\sqrt{3}/2 = 1/\sqrt{2}$. Угол между ребром DB и гранью ACB равен $\angle BDE$. Найдем этот угол: $EF = DF\,\mathrm{tg}\angle BDE = AF\sin\angle ACF$, $AF = DF\,\mathrm{tg}\angle ADF$, поэтому $\mathrm{tg}\angle BDE = \sin\angle ACF\,\mathrm{tg}\angle ADF = \left(1/\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = 1$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Обозначим скорость коробки сразу после вылета из нее пули через v. На основании закона сохранения импульса можно записать

$$mv_0 = \frac{1}{3}mv_0 + 5mv.$$

Отсюда

$$v = \frac{2}{15}v_0.$$

Расстояние, на которое переместится коробка, обозначим через s. За время движения коробки ее кинетическая энергия будет израсходована на работу против сил трения, поэтому

$$s = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{2}{225}\frac{v_0^2}{\mu g}.$$

2. Обозначим давление насыщенного пара при температуре $t_0 = 110\ ^\circ\mathrm{C}$ ($T_0 = 383$ К) через $p_н$. При медленном изотермическом увеличении объема на ΔV пар совершил работу $A = p_н\Delta V$. Отсюда

$$p_н = \frac{A}{\Delta V} = 1{,}5 \text{ атм}.$$

Обозначим объем цилиндра под поршнем через V_0. Запишем уравнения состояния насыщенного пара в начальном и конечном состояниях:

$$p_н(V_0 - 0{,}001V_0) = \frac{m_1}{M}RT_0,$$

$$p_н(V_0 + \Delta V) = \frac{m_2}{M}RT_0,$$

где m_1 — масса пара в исходном состоянии, M — молярная масса пара, m_2 — масса пара в конечном состоянии. Вычитая