им его до чертежа на рисунке 12 в статье: продолжим NB и JM до пересечения в K, а NM и BJ — до пересечения в D. Достроим параллелограммы $BNMA$ и $KNDC$ (рис.4). При гомотетии с центром N и коэффициентом 2 середины диагоналей BM и NJ нашего четырехугольника перейдут, соответственно, в точки A и J, а середина отрезка KD — в точку C. Остается заметить, что по «теореме о диагоналях» AC проходит через J, значит, и рассматриваемые середины отрезков лежат на одной прямой.

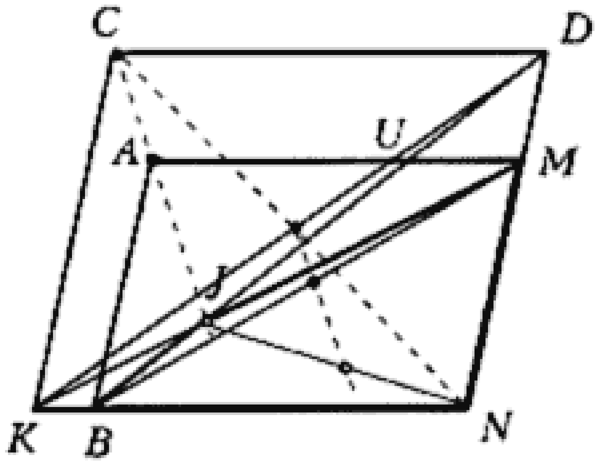

Рис. 4

5. В обозначениях рисунка 14 в статье оба взаимно двойственных утверждения сводятся к одному и тому же факту: прямая, соединяющая точку пересечения $a = AB'$ и $b' = A'C$ с точкой пересечения $a' = AC'$ и $b = A'C$, проходит через точку пересечения прямых BC' и $B'C$. Относительно второго вопроса задачи укажем лишь, что прямым a, b, c, a', b', c' на рисунке 14 отвечают, соответственно, прямые KC, BP, ND, LM, CD, KN на рисунке 12, а один чертеж превращается в другой при центральной проекции, отправляющей A и A' на бесконечность.

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. $v_{\min} = \dfrac{q}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2\pi\varepsilon_0 ml}}$.

2. $v = \sqrt{v_0^2 + 2ql\mathcal{E}/(md)}$.

3. $F_{\max} = \pi r^3 AB_0/R$.

4. $B = g\sqrt{mL}/(v_0 l)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $(1; -1/2)\cup(-1/4; 0)\cup(0; 1)$.

2. $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. 12. Пусть $\angle CAK = \alpha$, $\angle KBC = \beta$ (рис. 5). Это углы между касательной к окружности и хордам AK и KB соответственно. Так как углы KBA и KAB опираются на дуги AK и KB соответственно, то $\angle KAB = \beta$, $\angle ABK = \alpha$. Из треугольников AKN и AKM находим $KM = KN\sin\beta/\sin\alpha$ (1). Аналогично, из треугольников KMB и KBL получаем $KM = KL\sin\alpha/\sin\beta$ (2). Перемножая равенства (1) и (2), получаем $KM^2 = KN\cdot KL$.

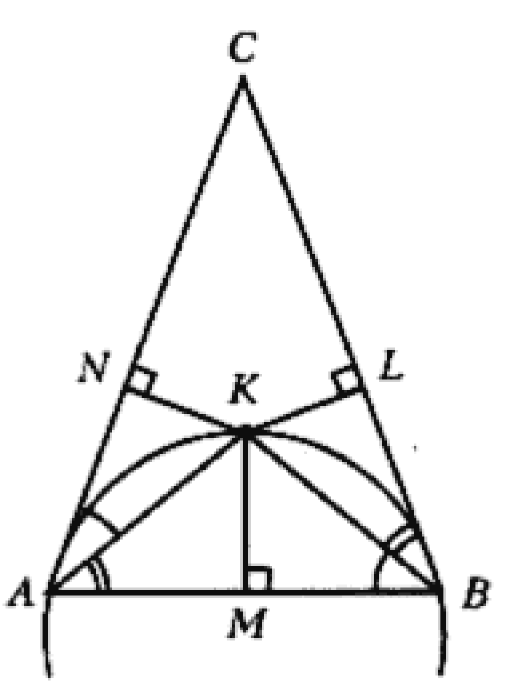

Рис. 5

4. $a = -6$, $b = -11$, $c = -6$. Пусть $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, а $A = (x_1, y_0)$, $B = (x_2, y_0)$. Поскольку точки A и B симметричны относительно прямой $x = -2$, то существует такое $t > 0$, что $A = (-2 - t;\ y_0)$, $B = (-2 + t,\ y_0)$. По условию $f'(-2-t) = f'(-2+t)$, откуда $a = -6$. При этом $f'(x_1) = f'(x_2) = -3t^2 + 12 + b$ (1). Равенство $y_0 = f(x_1) = f(x_2)$ принимает вид $(2+t)^3 - 6(2+t)^2 - b(2+t) = (2-t)^3 - 6(2-t)^2 + b(t-2)$, и из него находим $b = -12 + t^2$ (2). Подставляя (2) в (1), получим $f'(x_1) = f'(x_2) = -2t^2 < 0$ (3), поэтому прямая, проходящая через точку A, лежит правее прямой, проходящей через точку B, и уравнения соответствующих прямых таковы: A: $y = y_0 - 2t^2(x - (-2-t))$; B: $y = y_0 - 2t^2(x - (-2+t))$. Подставляя в эти уравнения $x = 0$, получим систему: $y_0 - 2t^2((2+t)) = -6$, $y_0 - 2t^2((2-t)) = 2$ (5). Из (5) найдем $t = 1$, $y_0 = 0$. Из (3) найдем, что $b = -11$, а из равенства $y_0 = 0$ получим, что $c = -6$.

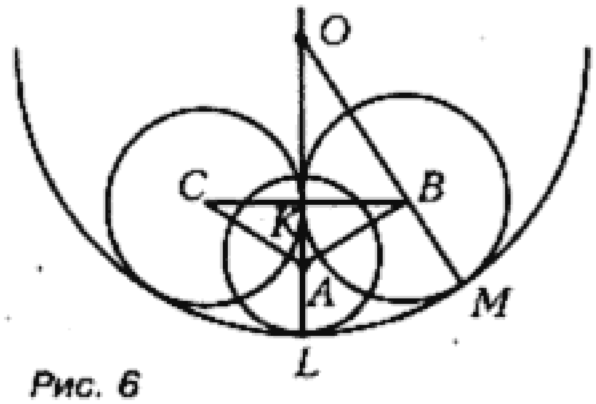

Рис. 6

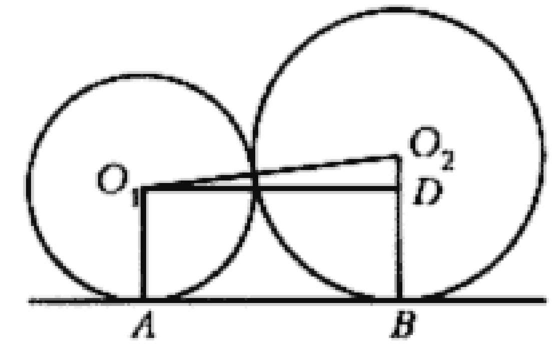

Рис. 7

5. $9r/4$. Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры шаров, через A, B, C — их проекции на основание цилиндра, через O — центр основания цилиндра (рис. 6, 7). На рисунке 7 отрезок O_1D перпендикулярен O_2B, $O_1O_2 = 3r/2$, $O_2D = r/2$. Из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2D получим $O_1D^2 = (3r/2)^2 - (r/2)^2 = 2r^2 = AB^2$. Пусть $OL = OM = x$ (см. рис.6), тогда $OK = OL - AL - AK = x - 3r/2$, $OB = OM - BM = x - r$, а из треугольника ABK имеем $AK^2 = AB^2 - BK^2 = r^2$. Теперь теорема Пифагора для треугольника OKB дает $OK^2 = OB^2 - BK^2$, т.е. $(x - 3r/2)^2 = (x - r)^2 - r^2$. Решая это уравнение, получим ответ.

Вариант 2

1. $\pm 2\pi/3 + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. $x \le -4$, $1 \le x < 3$, $x > 5$.

3. $2/3$, $3\sqrt{7}/20$. Из условия задачи $EC = ED$ (рис.8), т.е. $\angle ADE = \angle CDE = \angle ECD = \angle BCD = \alpha$, откуда $ED \parallel BC$ и $\angle DBC = \alpha$. Треугольники DEC и DBC подобны, поэтому $CD = \sqrt{EC\cdot CB} = 2/3$. Далее, $\cos\alpha = CB/(2CD) = 3/4$, $S = (CB\cdot AB\sin 2\alpha)/2$. Сторону AB найдем из теоремы синусов: $AB/\sin 2\alpha = CB/\sin 3\alpha$.

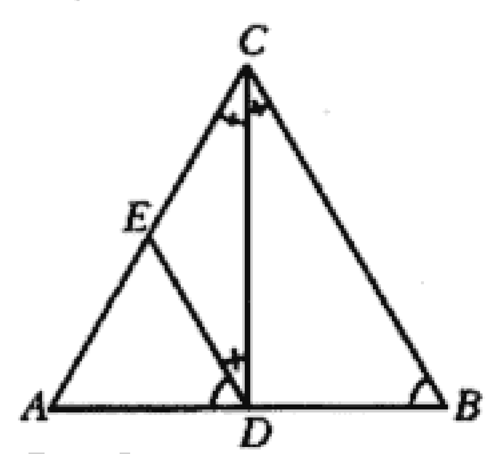

Рис. 8

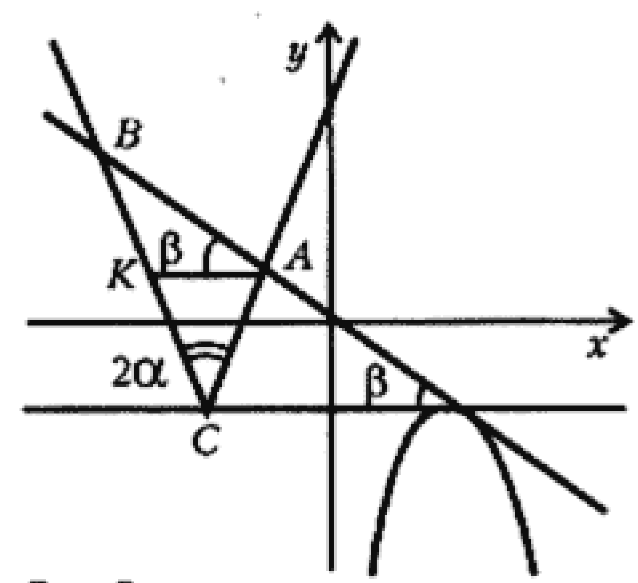

Рис. 9

4. $R = 13\sqrt{10}/16$. В треугольнике ABC через точку A проведем прямую, параллельную оси Ox и пересекающую сторону BC в точке K (рис.9). Пусть $\angle BAK = \beta$, $\angle C = 2\alpha$. Тогда $\angle A = \beta - \alpha + \pi/2$, $\angle B = \pi/2 - \beta - \alpha$. По условию $\angle A - \angle B = 2\beta$, отсюда $\beta = \arccos 3/\sqrt{10}$, и тангенс угла наклона касательной равен $-1/3$. Найдем точку касания: $y'(x_0) = -x_0/6 + 1 = -1/3$, т.е. $x_0 = 8$, $y(x_0) = -8/3$. Уравнение касательной имеет вид: $y = -(x-8)/3 - 8/3 = -x/3$. Из уравнения $-x/3 = 3|x+6| - 7/3$ найдем абсциссы точек A и B: $x_1 = -61/8$, $x_2 = -47/10$. Длина проекции стороны AB на ось Ox равна $|x_1 - x_2| = 117/40$. Поэтому $AB = |x_1 - x_2|/\cos\beta = 39/4\sqrt{10}$. Пусть R — радиус