«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. Из условия задачи следует, что 15 генералов получили ордена третьей степени, 8 генералов — еще и ордена второй степени и 3 генерала — ордена первой степени. Всего было вручено 15 + 8 + 3 = 26 орденов.

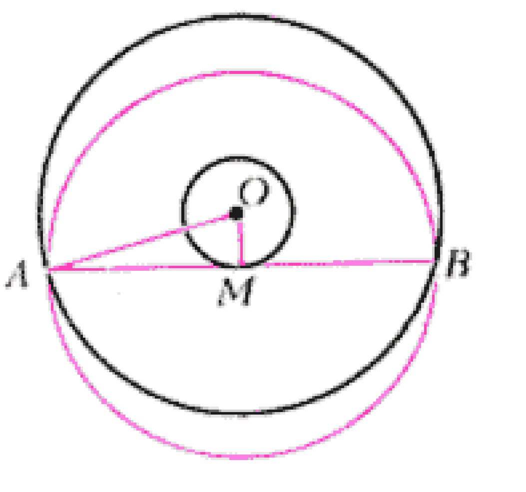

Рис. 1

2. Пусть O — центр двух первых окружностей, AB — указанная в задаче хорда и M — ее середина (рис.1). В прямоугольном треугольнике AMO отрезок AO — радиус одной из первых окружностей, OM — радиус второй окружности, а AM — радиус третьей окружности. По теореме Пифагора $OM^2 = AO^2 - OM^2$. Умножив это равенство на π, получим $\pi OM^2 = \pi AO^2 - \pi OM^2$. В левой части этого равенства стоит площадь третьего круга, а в правой — разность площадей первых двух кругов, т.е. площадь кольца, образованного первыми двумя окружностями.

3. 8739 + 8739 = 17478.

4. Наибольшее простое число, меньшее 15, равно 13, а наименьшее простое число, большее 15, равно 17. Осталось заметить, что наибольшее простое число, меньшее 17, вновь 13, а наименьшее простое число, большее 13, также 17, как и для числа 15. Отсюда следует, что искомая сумма равна 65.

5. Первое число может оканчиваться лишь на 11, 12, 21 и 22, а второе — лишь на 33, 34, 43 или 44. Проверив все случаи перемножения, легко убедиться, что у произведения две последние цифры никогда не будут равны.

(см. «Квант» №6)

1. Пусть К.Горовой дал x долларов и x центов. Заметим, что x не больше 99. Тогда К.Моровой дал $x + 3$ доллара и $x/8$ центов. Отсюда следует, что x делится на 8. Значит, $x = 8y$, где y не превосходит 12. В сумме эти двое оказали помощь в размере $16y + 3$ доллара и $9y$ центов, т.е. $1609y + 300$ центов. Так как это число представляется в виде $7(230y + 43) - (y + 1)$, то $y + 1$ должно делиться на 7, чтобы вся сумма делилась на 7. (Вспомним, что К.Хоровой заплатил ровно в 7 раз меньше, чем первые двое.) Среди чисел y в пределах от 1 до 12 этому условию удовлетворяет только число 6. Поэтому $x = 48$.

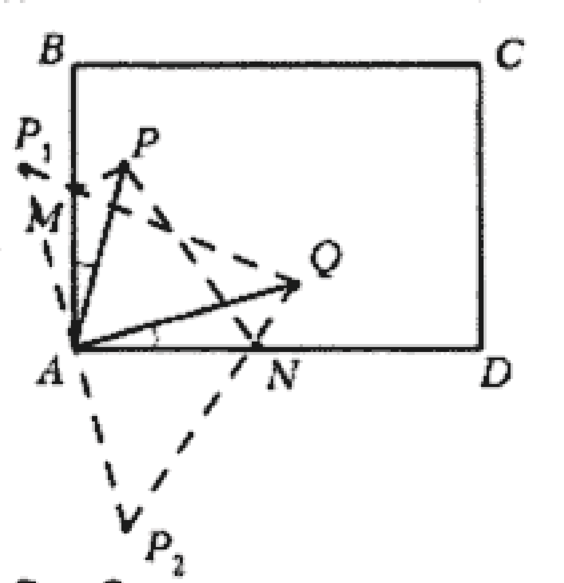

Рис. 2

Окончательно получаем, что первый дал 48 долларов и 48 центов, второй — 51 доллар и 6 центов, третий — 14 долларов и 22 цента, а всего — 113 долларов и 76 центов.

2. Точку P симметрично отразим от бортов AB и AD. Получим точки P_1 и P_2. Очевидно, что $AP_1 = AP_2 = AP$. Длина пути PMQ, очевидно, равна длине отрезка QP_1, а длина пути PNQ равна длине отрезка QP_2 (рис.2). Теперь из равенства углов PAB и QAD следует, что углы QAP_1 и QAP_2 — прямые, следовательно, треугольники AP_1Q и AP_2Q равны. Получаем, что $P_1Q = P_2Q$, следовательно, указанные в задаче пути равны.

3. Здесь использована римская нумерация со следующей кодировкой символов: I — ◯, V — △, X — □, C — ☆, M — ▽. Таким образом, запись в условии задачи означает MCMXCVII, или число 1997.

4. Первоначально может показаться, что время «кругосветного путешествия» точки M равно 6 секундам, но следует заметить, что стержень «заставляет» точку M трижды совершать

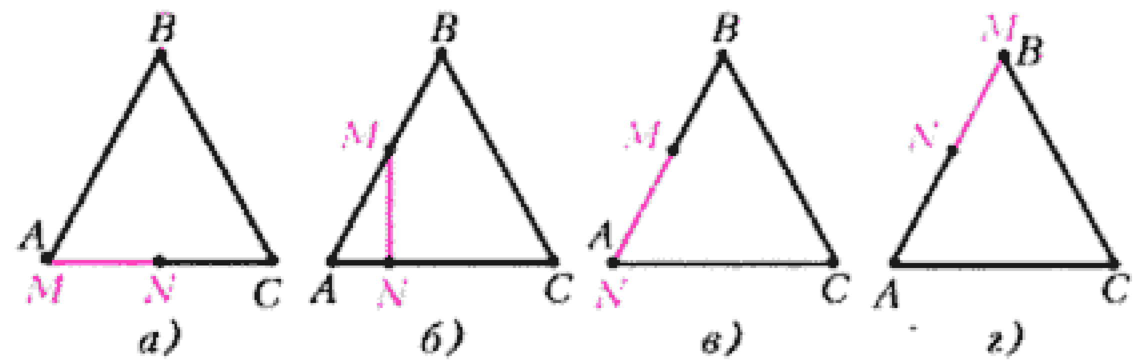

Рис. 3

«попятное» движение. Рассмотрим движение точки M от точки A до точки B. На рисунке 3 показаны узловые моменты этого движения. Из положения *а* в положение *б* точка M проходит отрезок, равный $2/\sqrt{3}$. Далее в положение *в* точка M проходит попятно отрезок длиной $2/\sqrt{3} - 1$ и, наконец, точка M попадает в точку B, пройдя отрезок длиной 1. Таким образом, путь из A в B точка M проходит за $4/\sqrt{3}$ секунд, а полный оборот делает за втрое большее время, т.е. за $4\sqrt{3}$ секунд.

5. Так как в волейболе ничьих не бывает, то не имеют побед те команды, которые проиграли всем остальным. Но это может быть лишь одна команда, так как если бы их было две или больше, то кто-то из них победил во встрече между собой. Значит, 20% команд составляет ровно одна команда и всего было 5 команд.

СКВОЗЬ РОЗОВЫЕ ОЧКИ

1. Не получит. Дальнозоркость.
2. Зеленого.
3. Нет. Черного.
4. Вызывает — выпуклость стекол очков не соответствует близорукости.
5. Глаз человека видит в пределах угла около 120°. Поле зрения глаза зайца — почти 180°, так что поля зрения обоих глаз почти смыкаются спереди и сзади и непосредственно перед собой заяц почти не видит.
6. Вероятно, близорукость.
7. Двойные стекла дают два отражения лампы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТАМОРФОЗЫ

1. Докажите, что $AQKC$ и $BQMD$ — параллелограммы.

2. По свойству спирального подобия, доказанному в статье, все треугольники QAB, где Q — вторая точка пересечения окружностей, подобны между собой. Поэтому и треугольники QAM, где M — середина AB, подобны между собой. Отсюда следует, что каждая из рассматриваемых точек M получается из соответствующей точки A при фиксированном спиральном подобии с центром Q. А так как точка A пробегает окружность, Q, ее образ при этом подобии, также пробегает окружность. Это рассуждение позволяет легко найти положение центра и радиус этой окружности.

3. Спиральное подобие с центром Q, переводящее одну окружность в другую (а точку A в B), переводит и первую касательную во вторую. Поэтому угол между касательными ($\angle AMB$ или смежный с ним) равен углу поворота этого подобия, т.е. углу AQB. Отсюда с помощью свойства вписанного угла (точнее, обратной к нему теоремы) и выводится утверждение задачи. Подчеркнем, что аккуратное доказательство требует рассмотрения различных расположений точек или использования ориентированных углов.

4. Теорема о прямой Гаусса непосредственно сводится к теореме о диагоналях параллелограммов, рассмотренной в статье. Чтобы сохранить обозначения, принятые в статье, обозначим данный четырехугольник $NBJM$. А теперь достро-