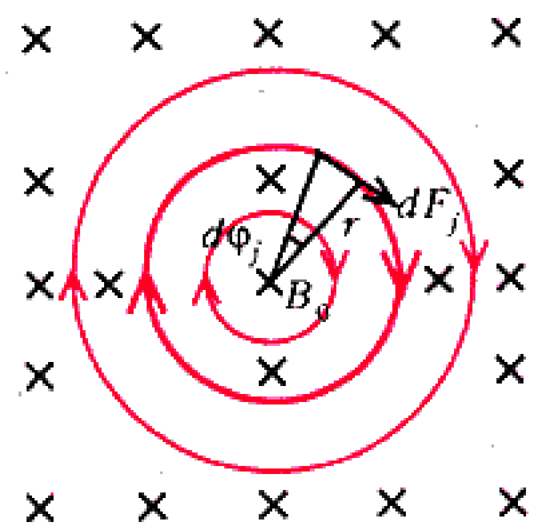

Рис. 3

нитное поле порождает вихревое электрическое поле, силовые линии которого на рисунке 3 изображены красными круговыми линиями (для простоты будем рассматривать симметричное распределение магнитного поля относительно нашего кольца). Одна из силовых линий, очевидно, проходит вдоль нашего кольца. Пусть в рассматриваемый момент величина напряженности вихревого электрического поля на этой силовой линии равна $E_B(t)$.

С одной стороны, работа, совершенная вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда вдоль замкнутого контура кольца, численно равна ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = 2\pi r E_B(t).$$

С другой стороны, согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции в контуре кольца равна

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий наш контур. Приравнивая два выражения для ЭДС индукции, получим

$$E_B(t) = -\frac{r}{2}\frac{dB(t)}{dt}.$$

На каждый небольшой элемент заряженного кольца будет действовать сила, направленная по касательной к окружности радиусом r и равная

$$dF_j = E_B(t)\frac{Q}{2\pi r} r\,d\varphi_j = -\frac{Q}{4\pi}\frac{dB(t)}{dt} r\,d\varphi_j.$$

Суммарная сила, действующая в данный момент времени на все кольцо, равна

$$F = \sum_{j=1}^{N} dF_j = -\frac{Qr}{4\pi}\frac{dB(t)}{dt}\sum_{j=1}^{N} d\varphi_j = -\frac{Qr}{2}\frac{dB(t)}{dt}.$$

За малое время Δt импульс силы, подействовавший на кольцо вдоль окружности, приведет к изменению импульса кольца:

$$F\Delta t = m\Delta v,$$

откуда получим

$$\Delta v = \frac{F}{m}\Delta t = -\frac{Qr}{2m}\Delta B$$

(мы учли, что $B'(t)\Delta t = \Delta B$). Малое изменение угловой скорости кольца составляет

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{r} = -\frac{Q}{2m}\Delta B.$$

Такое же соотношение связывает изменения угловой скорости и магнитной индукции за все время. Учитывая, что $\Delta\omega = \omega - 0 = \omega$; а $\Delta B = 0 - B_0 = -B_0$, получаем

$$\omega = \frac{QB_0}{2m}.$$

Задача 5. *По вертикальным проводящим рельсам, расстояние между которыми l, в поле тяжести может скользить без трения проводящая перемычка массой m. Рельсы замкнуты на идеальную катушку индуктивностью L. Вся система находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией, равной B и перпендикулярной плоскости рисунка 4. В начальный момент перемычка удерживается внешней силой. Определите максимальное смещение перемычки от начального положения после устранения внешней силы. Омическими потерями пренебречь.*

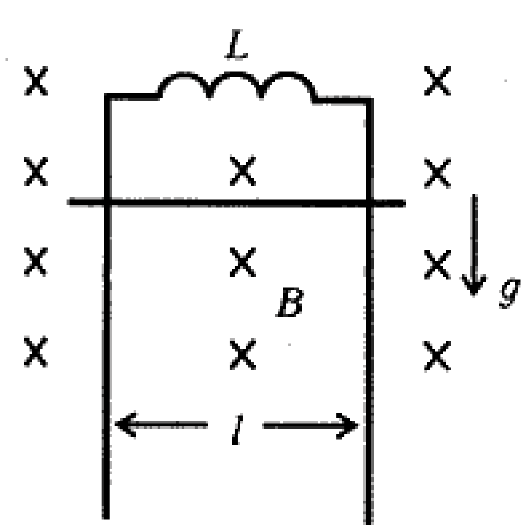

Рис. 4

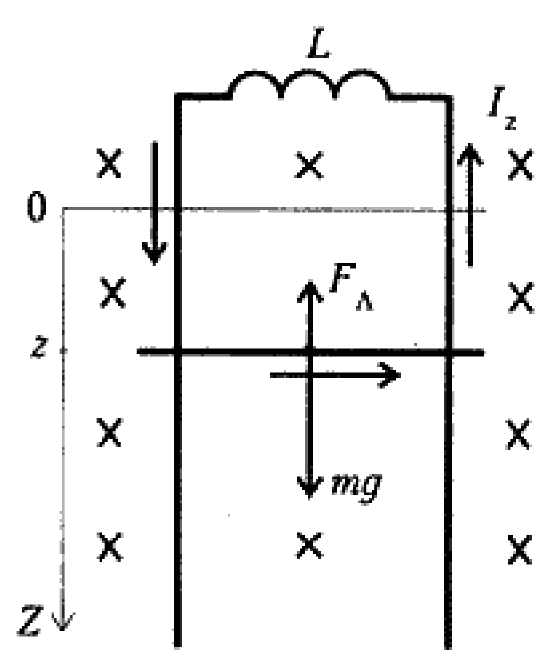

Рис. 5

В системе координат, изображенной на рисунке 5, начальное положение перемычки $z = 0$. Рассмотрим произвольный момент времени, когда перемычка находится на расстоянии z от начала координат и имеет скорость $v_z = \dfrac{dz}{dt}$. В результате пересечения линий магнитного поля в перемычке наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = v_z Bl.$$

Возникающий в замкнутом контуре ток I_z вызывает в катушке ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L\frac{dI_z}{dt}.$$

При отсутствии омического сопротивления алгебраическая сумма ЭДС, действующих в замкнутом контуре, равна нулю:

$$Bl\frac{dz}{dt} - L\frac{dI_z}{dt} = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(Blz - LI_z) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$Blz - LI_z = \text{const}.$$

Поскольку при $t = 0$ $z = 0$ и $I_z = 0$, при $t \ge 0$ получаем

$$Blz - LI_z = 0.$$

На перемычку действуют две силы: сила тяжести, равна mg, и сила Ампера со стороны внешнего магнитного поля, равная $F_A = BI_z l$. Запишем уравнение движения перемычки вдоль оси Z:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - BI_z l,$$

или, после подстановки выражения для I_z,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{B^2l^2}{mL}z = g.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания перемычки относительно уровня $z = (mgL)/(Bl)^2$. В этом положении ускорение перемычки равно нулю и значение z равно амплитуде колебаний. А максимальное смещение перемычки, очевидно, равно двойной амплитуде, поэтому

$$z_{\max} = \frac{2mgL}{B^2l^2}.$$

Этот результат можно получить и