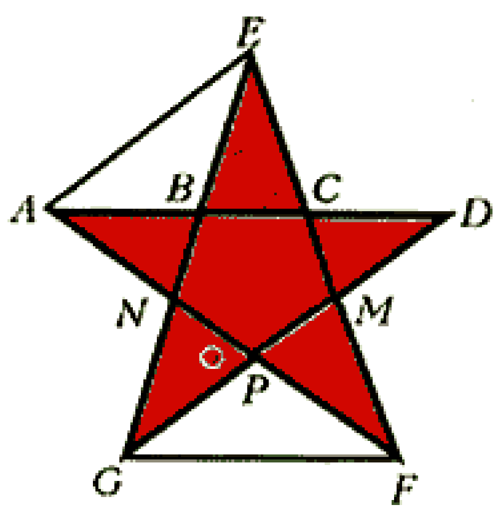
Число Фидия — золотое сечение

Пятиконечная звезда постоянно привлекала внимание людей своим совершенством. Пифагорейцы – ученики школы Пифагора – выбрали в качестве символа своего союза именно эту звезду. Она же считалась у них амулетом здоровья. И сейчас пятиконечная звезда красуется на флагах и гербах многих стран. В чем же ее привлекательность?

Дело в том, что в этой звезде наблюдается удивительное постоянство отношений составляющих ее



отрезков. Взгляните на рисунок. Трудно в это поверить, но

$$AD : AC = AC : CD = AB : BC = \\ = AD : AE = AE : EC.$$

Пользуясь симметрией звезды, этот ряд равенств можно еще очень долго продолжать.

А чему же равно это отношение? Чтобы его найти, обозначим $AD = a$, $AC = b$ и воспользуемся первым равенством. Так как $CD = a - b$, то из первого равенства отношений следует, что $a : b = b : (a - b)$, или $a^2 - ab - b^2 = 0$. Разделив обе части этого уравнения на b и обозначив $a/b = \Phi$, получим уравнение $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, откуда

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

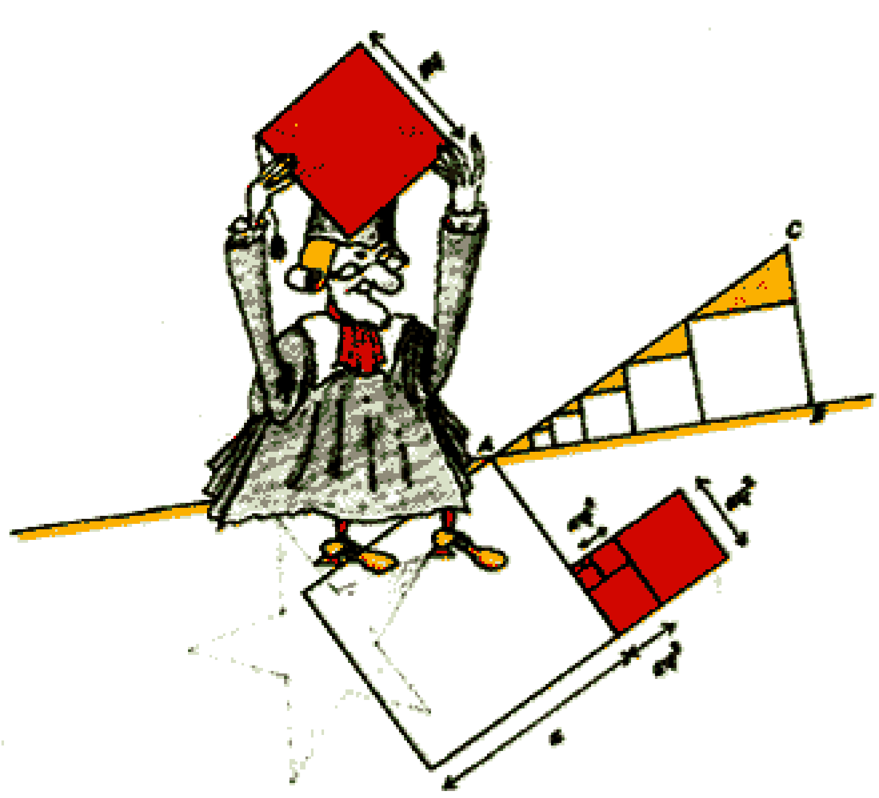
Второй корень этого уравнения отрицателен и нас сейчас не интересует. Часто рассматривают не отношение большего отрезка к меньшему, а обратную к нему величину – отношение меньшего отрезка к большему. Число $1/\Phi$ обозначается буквой φ, оно равно $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$. Отметим, что Φ и φ – прописная и строчная формы греческой буквы «фи». Такое обозначение принято в честь древнегреческого скульптора и архитектора Фидия, жившего в V веке до н.э.

Но вернемся к самим числам

$$\Phi = 1{,}618034\ldots \text{ и } \varphi = 0{,}618034\ldots$$

Вы обратили внимание на то, что приведенные здесь значения чисел Φ и φ отличаются только первой цифрой? Что это – случайность? Удивительно, но и все следующие знаки этих чисел будут совпадать. Этот факт заложен в самом уравнении для числа Φ:

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$



Перепишем его в виде

$$\Phi - 1 = 1/\Phi,$$

откуда видно, что числа Φ и φ различаются ровно на 1.

Если то же уравнение переписать в виде $\Phi^2 = 1 + \Phi$, то, заменяя Φ под корнем на $\sqrt{1+\Phi}$, получим

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}.$$

Продолжая эту процедуру еще и еще раз, и так до бесконечности, получим красивую формулу

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}.$$

А вот еще одна красивая формула для числа Φ:

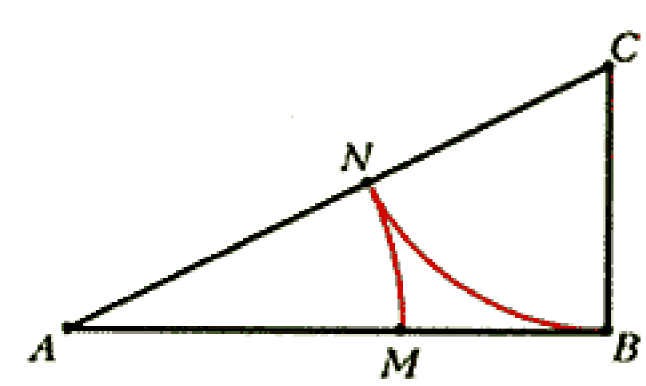
$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

Эта формула получается, если в преобразованном уравнении $\Phi = 1 + 1/\Phi$ заменить Φ в знаменателе на это же выражение:

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}},$$

и так далее.

А как разделить отрезок в отношении Φ? Такое построение, производимое циркулем и линейкой, содержится уже в знаменитых «Началах» Евклида, написанных за 300 лет до нашей эры. Процесс построения хорошо виден на рисунке. Сначала к отрезку AB, который мы хотим разделить в отношении Φ, восставляется перпендикуляр BC, длина которого равна половине длины отрезка AB. Затем проводится отрезок AC – гипотенуза треугольника ABC. Далее проводятся две окружности: одна с центром в точке C и радиусом BC, а вторая с



центром в точке A и радиусом AN, где точка N – точка пересечения первой окружности с отрезком AC. Точка M, в которой вторая окружность пересекает отрезок AB, и будет делить отрезок AB в отношении Φ, т.е. $AM : MB = \Phi$.

Пропорция, выражаемая числом