ются; например, из окружностей получаются эллипсы. Таким образом, ни перпендикуляров, ни описанной окружности после проекции на чертеже не будет, да и прямоугольника, вокруг которою она была описана, не останется — он превратится в параллелограмм. Однако прямые AC, BD и KM по-прежнему будут пересекаться в одной точке, а все в целом будет выглядеть примерно как рисунок 12. Более того, можно показать, что любые две пересекающиеся тройки параллельных прямых можно представить как проекцию соответствующих прямых с чертежа нашей задачи. В этом смысле второе утверждение задачи и доказанный выше более общий факт равносильны.

Итак, параллельная проекция позволила нам выделить свойства рассматриваемой картинки, «отвечающие» за конкуррентность. Можно пойти дальше и подвергнуть чертеж еще более существенному искажению, производимому *центральной проекцией*, заменив параллельный пучок света пучком лучей от точечного источника. Центральная проекция, как и параллельная, сохраняет коллинеарность точек, однако, вообще говоря, не сохраняет параллельность: совокупность нескольких параллельных между собой прямых превращается в набор прямых, проходящих через одну и ту же точку (рис.13). Таким образом, в результате центральной проекции конфигурация, изображенная на рисунке 12, превратится в нечто вроде того, что изображено на рисунке 14, а соответствующее утверждение о конкуррентных диагоналях параллелограммов — в следующую теорему:

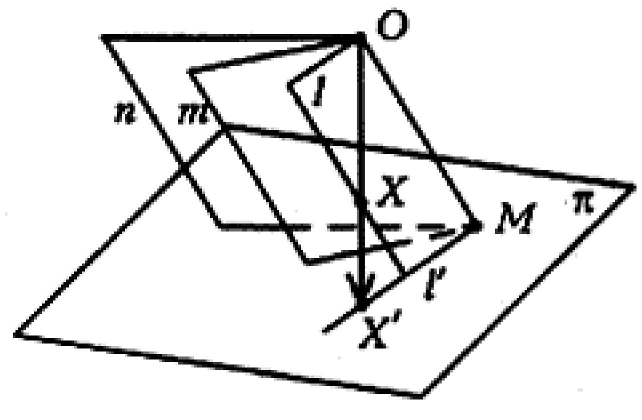

Рис. 13. Проекция из центра O на π плоскость переводит точку X в X', а прямую l, проходящую через X, в l' = X'M, где M — такая точка плоскости, что OM параллельна l. Центральные проекции прямых n и m, параллельных l, также проходят через M.

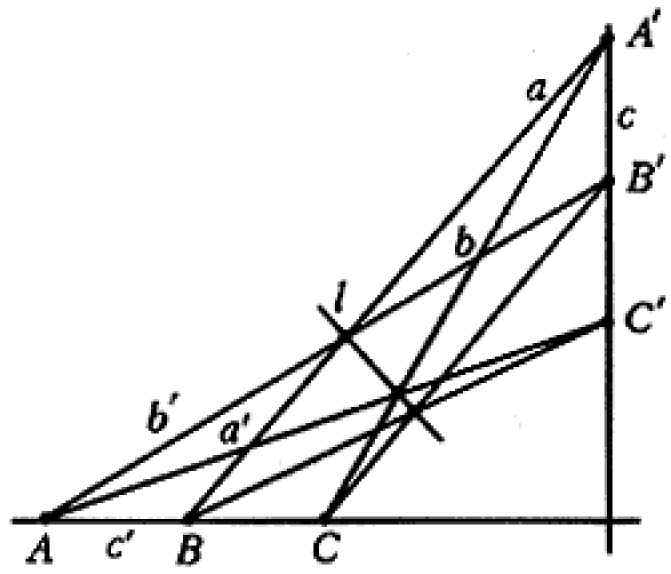

Рис. 14

Пусть a, b, c и a', b', c' — две тройки конкуррентных прямых. Тогда три прямые, соединяющие попарно точки пересечения прямых $a \cap b'$ и $a' \cap b$, $b \cap c'$ и $b' \cap c$, $c \cap a'$ и $c' \cap a$, конкуррентны (пересекаются в одной точке).

Интересно, что эта теорема равносильна утверждению, которое получается из нее заменой слов «прямая» и «точка», «конкуррентность» и «коллинеарность» друг на друга:

Пусть A, B, C и A', B', C' — две тройки коллинеарных точек. Тогда три точки пересечения пар прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ коллинеарны (т.е. лежат на одной прямой).

Этот факт является одной из фундаментальных теорем геометрии (точнее говоря, проективной геометрии); он называется *теоремой Паппа*.

Два утверждения о точках и прямых, которые, подобно последним, получаются одно из другого перестановкой этих двух понятий, называются *двойственными* друг другу. В проективной геометрии, которая изучает свойства, сохраняющиеся при центральной проекции, утверждение, двойственное к верному, всегда само верно.

Упражнение 5. Покажите, что теорема Паппа и двойственное к ней утверждение являются просто переформулировками друг друга. Расставьте обозначения на рисунке 14 в соответствии с рисунком 12 и попробуйте разобраться, как теорема о конкуррентных диагоналях параллелограмма получается из теоремы, двойственной к теореме Паппа.

Не будем доказывать теорему Паппа отдельно. Одно из доказательств состоит в том, чтобы перейти от рисунка 14 обратно к рисунку 12 с помощью подходящей центральной проекции: ее можно выбрать так, чтобы «отправить точки A и A' на бесконечность», т.е. превратить прямые, сходящиеся в этих точках, в параллельные. Можно «отправить на бесконечность» и другие элементы чертежа (например, прямую $A'B'$ или прямую l) и таким образом свести теорему к одному из ее, как говорят, «аффинных вариантов». Эти варианты весьма разнообразны и не похожи один на другой. Любителям геометрии безусловно доставит удовольствие их исследование. С этим полезным занятием автор и оставляет читателя, хотя, упомянув теорему Паппа, он получил прекрасный повод продолжать этот рассказ дальше и дальше...

НОВОСТИ НАУКИ

ВСЕЛЕННАЯ — КРИСТАЛЛ

Мы привыкли предполагать, что в больших масштабах материя в космосе распределена более или менее равномерно. Это один из основополагающих принципов мироздания — однородность и изотропность Вселенной. Иначе говоря, галактики и скопления галактик должны быть разбросаны по космосу случайно.

Эстонские астрономы из обсерватории в Тарту под руководством профессора Эйнасто обнаружили, что это не так. Изучая большой массив данных, они обнаружили, что сверхскопления образуют узлы повышенной концентрации и расстояние между ними порядка 120 мегапарсек (это около четырехсот миллионов световых лет). Конечно, кое-что встречается и в промежутках между узлами, но большинство объектов сосредоточено в узлах, аналогично расположению атомов в кристаллической решетке.

Первый сигнал о том, что есть такая структура, поступил семь лет назад, но тогда ученые заметили периодичность на маленьком массиве галактик, расположенных вдоль одного направления, и к их результатам не прислушались. Теперь его статистическая достоверность резко увеличилась. Придется серьезно задуматься: что за силы и законы делают нашу Вселенную похожей на кристалл? Один из астрофизиков — Марк Дэвис из Калифорнии — сказал, что если результ Эйнасто подтвердится, то получится, что мы знаем о космосе даже меньше нуля.

А.Семенов