на его стороны (или их продолжения) лежат на одной прямой.

Эта прямая называется прямой Симсона точки P относительно треугольника ABC.

Доказательство иллюстрирует рисунок 11, на котором проекции точки P на

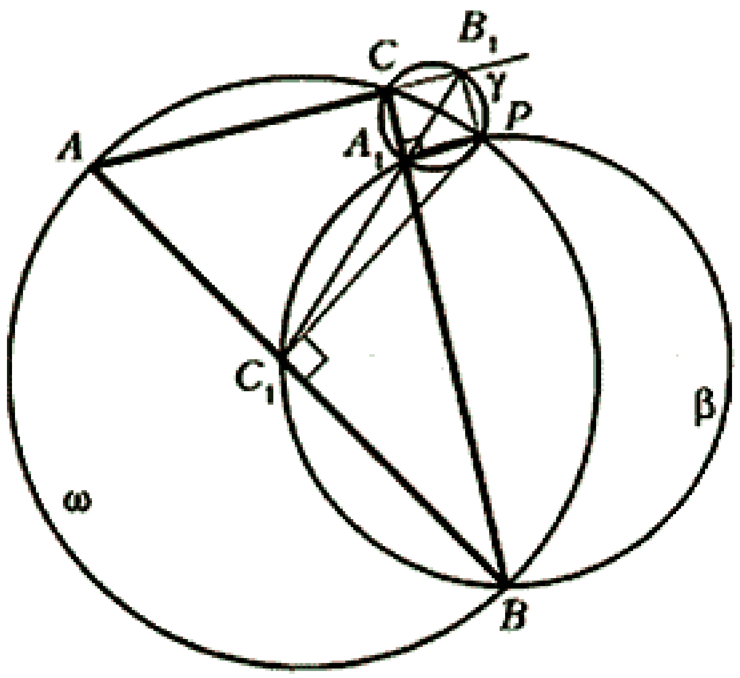

Рис. 11

описанной окружности ω треугольника ABC на его стороны обозначены, соответственно, A_1, B_1 и C_1. Построим на отрезках PB и PC как на диаметрах окружности β (которая пройдет через A_1 и C_1) и γ (которая пройдет через A_1 и B_1). Теперь выполним последовательно спиральное подобие S_1 с центром P, переводящее β в ω, а затем спиральное подобие S_2 с тем же центром, переводящее ω в γ.

Ясно, что в результате мы получим спиральное подобие S с центром P, переводящее β в γ. Посмотрим, что происходит с точкой C_1 при этом преобразовании. По доказанному нами свойству, преобразование S_1 переводит ее во вторую точку пересечения прямой BC_1 с ω — т.е. в A. Аналогично, $S_2(A) = B_1$. Таким образом, $S(C_1) = B_1$, а значит C_1B_1 проходит через точку пересечения β и γ, отличную от P, т.е. через A_1, и мы доказали, что три проекции лежат на одной прямой.

А сейчас снова посмотрим на чертеж нашей исходной задачи (рис.8). По условию точка P лежит на общей описанной окружности треугольников KLM и MNK. Очевидно, ее прямая Симсона относительно первого треугольника — это AC, а относительно второго — BD. Поэтому обе эти прямые проходят через проекцию J точки P на общую сторону KM этих треугольников, что и доказывает второе утверждение задачи.

Интересно, что и первое утверждение (о перпендикулярности) тоже можно получить с помощью прямых Симсона, хотя и не столь изящно, как второе. Замечаем, что при симметрии относительно центра данной окружности треугольник MNK переходит в треугольник KLM, а точка P — в диаметрально противоположную точку P'; значит, прямая BD переходит в прямую Симсона l точки P' относительно треугольника KLM. Таким образом, эти две прямые параллельны. С другой стороны, можно доказать (попробуйте!), что угол между прямыми Симсона двух точек P и P' относительно одного и того же треугольника равен половине угловой величины дуги PP' его описанной окружности. В нашем случае эта дуга есть полуокружность, т.е. соответствующие прямые Симсона (точек P и P' относительно треугольника KLM) перпендикулярны: $AC \perp l$. А так как l параллельна BD, получаем, что $AC \perp BD$.

Теорема Паппа

Мы видели, что первое утверждение нашей задачи можно существенно расширить. Второе утверждение допускает еще более впечатляющее обобщение. Оказывается, что оно остается справедливым без всяких прямых углов и окружностей. Существенно лишь то, что на чертеже имеются *две пересекающиеся тройки параллельных прямых.*

Они образуют несколько параллелограммов (а кстати, сколько?). Выберем любые три параллелограмма так, чтобы каждые два из них имели ровно одну общую вершину. Другими словами, выберем из девяти точек пересечения наших прямых три так, чтобы на каждой прямой была выбрана ровно одна точка — эти три точки и есть общие вершины выбираемых параллелограммов, а стороны образованного ими треугольника (красный треугольник на рисунке 12) являются их диагоналями.

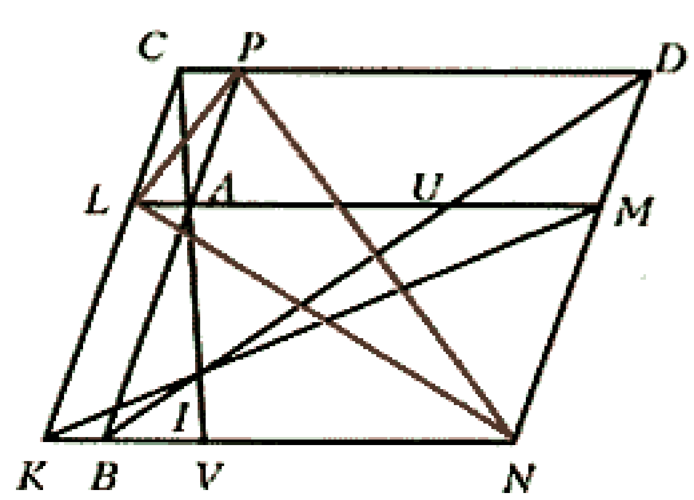

Рис. 12

Тогда три другие диагонали параллелограммов (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

(Контрольный вопрос: сколькими способами можно выделить «красный треугольник» на нашем рисунке?)

Докажем эту теорему для параллелограммов $ALCP$, $BPDN$ и $KLMN$ на рисунке 12 (эти обозначения отвечают исходной задаче). Естественно, это доказательство, после соответствующей смены обозначений, будет верным и при любом другом выборе тройки параллелограммов.

Мы должны доказать, что прямые KM, CA и BD пересекаются в одной точке или что BD проходит через точку J, в которой пересекаются прямые KM и CA. Обозначим через U и V точки пересечения прямых BD и LM, CA и KN, соответственно. Из подобия треугольников ALC и VBA и равенства противоположных сторон параллелограммов получаем равенства

$$\frac{KB}{BV} = \frac{LA}{BV} = \frac{CL}{AB} = \frac{PA}{AB}.$$

Из подобия треугольников UBA и UDM получаем

$$\frac{MU}{UA} = \frac{DM}{AB} = \frac{PA}{AB},$$

поэтому $KB/BV = MU/UA$. Отсюда и следует, что прямая $BU = BD$ проходит через J. (Действительно, треугольники KJV и MJA гомотетичны относительно J, значит, точки B и U, делящие отрезки KV и MA в одинаковом отношении, являются соответственными при гомотетии с центром J, т.е. лежат на прямой, проходящей через J.)

Упражнение 4. Докажите, что середины диагоналей четырехугольника и середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений его противоположных сторон, лежат на одной прямой. (Эта прямая называется прямой Гаусса.)

А теперь я хочу поделиться одним секретом геометрической «кухни» и объяснить, как можно было догадаться, что условия утверждения о конкурентности можно ослабить, избавившись в них от всяческих перпендикулярностей. Здесь опять помогают преобразования, но уже другого рода.

Представим, что чертеж к нашей задаче (рис.1) нарисован на прозрачной плоскости, и рассмотрим тень, отбрасываемую им на другую плоскость при освещении пучком параллельных лучей. Иначе говоря, параллельно спроектируем его на другую плоскость. Известно (и, в сущности, очевидно), что проекция прямой есть прямая [4] и что параллельная проекция сохраняет параллельность прямых. С другой стороны, такие объекты, как прямые углы или окружности, при параллельной проекции, вообще говоря, не сохраня-

[4] *Если только эта прямая не параллельна направлению проекции.*