параллелограмм переходит во второй; при этом CA переходит в QM и, стало быть, $CA \perp QM$ (детали оставляются читателю). Общий же случай сводится к этому частному: достаточно отложить на AQ и AM отрезки AQ_1 и AM_1, равные AL и AP соответственно (рис.6), и заметить, что в силу подобия треугольников ALQ и APM прямые QM и Q_1M_1 параллельны ($AQ/AQ_1 = AM/AM_1$), а к четырехугольнику Q_1M_1PL можно применить указанный частный случай.

Справедлив и еще более общий результат с произвольными (не обязательно прямыми) углами (см. задачу М1505).

Доказательства конкуррентности

Обратимся к доказательствам второго утверждения нашей задачи – о том, что прямые AC и BD пересекаются на диагонали (на наших рисунках – KM) данного прямоугольника.

1. Доказательство с помощью описанных окружностей. Одно из первых неписаных правил решения геометрических задач состоит в том, что если у вас есть несколько прямых углов, опирающихся на один отрезок, то нужно построить на нем как на диаметре окружность (она пройдет через вершины всех этих углов). И наша задача – не исключение.

Пусть AC и BD пересекаются в точке J (рис.8). Покажем, что отрезки JK и

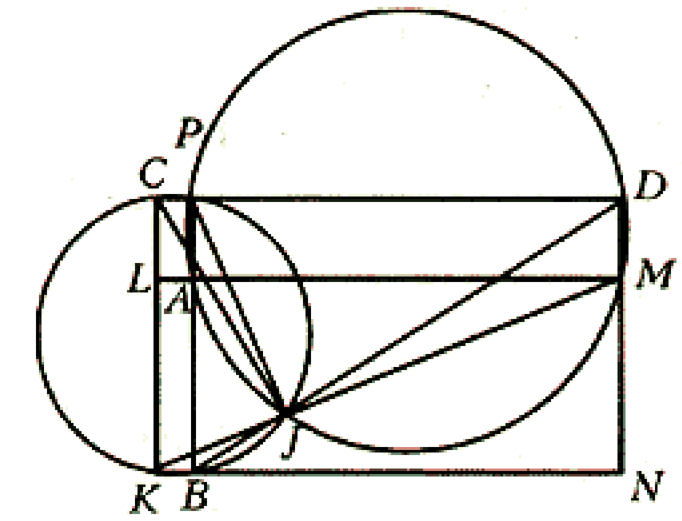

Рис. 8

JM образуют одну прямую. Мы уже доказали в первой части, что $\angle BJC = 90°$, т.е. J лежит на описанной окружности прямоугольника $PBKC$ так, что угол PJK тоже прямой. Аналогично, J лежит на описанной окружности прямоугольника $PAMD$, и потому $\angle PJM = 90°$, а значит, угол KJM – развернутый.

2. Доказательство с помощью спирального подобия пересекающихся окружностей. Мы уже использовали спиральное подобие в третьем доказательстве перпендикулярности. Гораздо менее очевидным образом этот вид преобразований, точнее, одно его очень полезное свойство, можно использовать для прямого, без использования перпендикулярности AC и BD, доказательства конкуррентности. Вот это свойство:

Допустим, что при спиральном подобии S с центром в точке A на данной окружности ω_1 эта окружность переходит в окружность ω_2. Тогда прямая, соединяющая произвольную точку X_1 на ω_1 с ее образом $X_2 = S(X_1)$ на ω_2, всегда проходит через вторую точку пересечения окружностей B (рис.9).

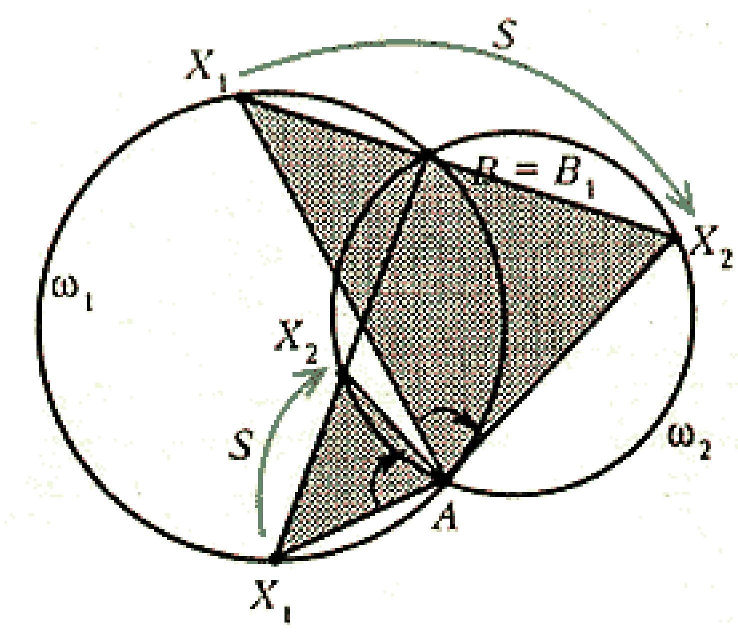

Рис. 9

Для доказательства заметим, что, по определению спирального подобия, во всех треугольниках AX_1X_2, где $X_2 = S(X_1)$ – образ X_1 при преобразовании S (см. рис.9, на котором показаны два примера таких треугольников), одинаковы угол при вершине A – он равен углу поворота – и отношение сторон AX_2/AX_1, равное коэффициенту этого подобия. Следовательно, эти треугольники подобны между собой и, в частности, имеют постоянный угол при вершине X_1. Если точка X_1 берется на окружности ω_1, то этот угол будет вписанным в нее[3], и значит, высекает на ней дугу AB_1 постоянной величины. Другими словами, прямая X_1X_2 пересекает окружность ω_1 в фиксированной точке B_1. Аналогично, и точка B_2 ее пересечения с окружностью ω_2 фиксирована (потому что угол AX_2X_1, вписанный в ω_2, также постоянен). А так как обе эти точки принадлежат *всем* прямым X_1X_2, они совпадают и лежат

[3] *Строго говоря, это верно только для точек на ω_1, но вне ω_2. Если точка X_1 окажется внутри ω_2 (рис.10), то угол AX_1X_2 будет смежным с вписанным углом. Впрочем, на справедливости дальнейших выводов это не сказывается. Нам не пришлось бы рассматривать разные случаи, если бы мы воспользовались здесь ориентированными углами.*

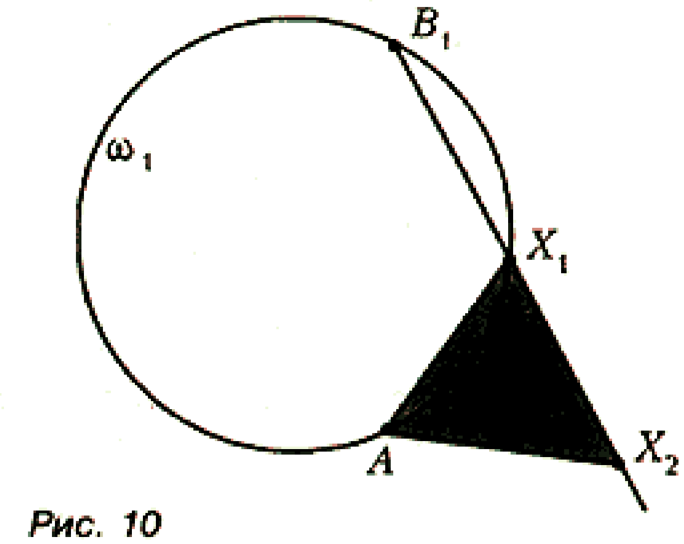

Рис. 10

одновременно на ω_1 и ω_2, т.е. $B_1 = B_2 = B$.

Вернемся к нашей задаче (рис.8). Замечаем, что точно так же, как и в третьем доказательстве перпендикулярности, прямоугольник $PCKB$ можно перевести в $PAMD$ спиральным подобием с центром P и углом поворота 90°. А теперь остается применить только что доказанное свойство к этому спиральному подобию, описанным окружностям прямоугольников, точкам C, K, B и их образам A, M, D: мы сразу получаем, что прямые CA, KM и BD проходят через общую точку J ($\neq P$) этих окружностей, что и требуется.

Прежде, чем двинуться дальше, познакомьтесь еще с несколькими примерами применения рассмотренного свойства.

Упражнения

2. Прямая, проходящая через точку P пересечения двух окружностей, пересекает их вторично в точках A и B. Найдите геометрическое место середин отрезков AB.

3. В условиях предыдущего упражнения проведем через A и B касательные к окружностям, на которых эти точки лежат. Докажите, что точка пересечения касательных, точки A и B, а также точка пересечения окружностей, отличная от P, лежат на одной окружности.

На самом деле это свойство отлично «работает» во многих задачах с пересекающимися окружностями. Сейчас мы убедимся в этом еще раз, доказав классическую теорему, которая позволит взглянуть на нашу исходную задачу с новой точки зрения.

Прямые Симсона

Теорема, о которой идет речь, была доказана У.Валлисом (так по традиции пишут фамилию *Wallace*, принадлежащую известному английскому математику) в 1797 году. Однако, как это очень часто случается в математике, ее ошибочно приписали Р.Симсону. Она утверждает, что

проекции точки P, взятой на описанной окружности треугольника ABC,