2. Доказательство параллельным переносом. Та же идея сравнения углов используется в следующем рассуждении. Продолжим PA до пересечения с окружностью в точке Q (рис.2). Как и в первом доказательстве, мы видим, что $\angle KQM = \angle KNM = 90°$. Теперь перпендикулярность AC и BD следует из того, что эти прямые соответственно параллельны KQ и QM.

Упражнение 1. Докажите, что прямая AC параллельна KQ, а BD параллельна QM.

Можно сказать, что здесь угол, образованный прямыми AC и BD, совмещается с углом KQM параллельным переносом.

3. Доказательство поворотом и гомотетией. Заметим, что поворот на 90° вокруг P переводит прямые PC, PL и PA в PB, PN и PD соответственно (на

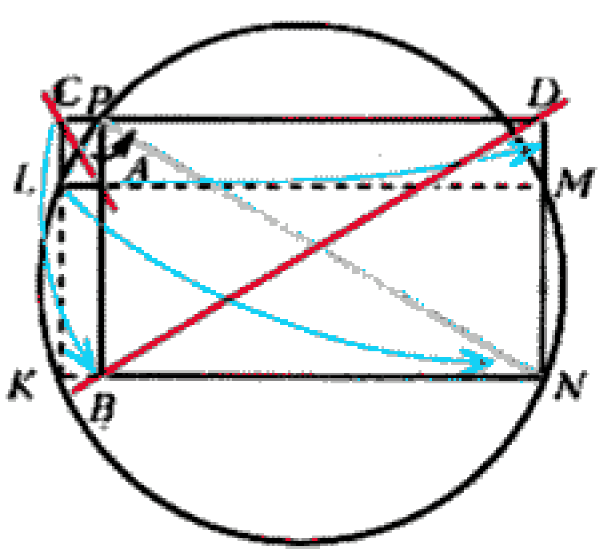

Рис. 4

рисунке 4 поворот выполняется против часовой стрелки). Это замечание подсказывает еще одно доказательство, в котором отрезок AC переводится непосредственно в BD. Выполним вслед за указанным выше поворотом гомотетию с центром P и коэффициентом PN/PL. В результате двух преобразований, т.е., как говорят, в результате их композиции, точка L, разумеется, перейдет в N. Куда перейдет A? Эту точку можно представить как ортогональную проекцию L на PB; поэтому ее образ — это пересечение прямой PD (образа PB) и перпендикуляра к PD, опущенного из N, образа L (ведь и поворот, и гомотетия, как и любые преобразования подобия, переводят прямые в прямые и сохраняют углы между ними). Следовательно, A переходит в D. Аналогично, C переходит в B. Итак, наше преобразование переводит AC в BD. А поскольку при повороте все прямые поворачиваются на один и тот же угол (в данном случае на 90°), а гомотетия сохраняет направления прямых, прямая BD, образ прямой AC, составляет с AC прямой угол.

В литературе встречаются различные названия для преобразования подобия, представимого как композиция поворота и гомотетии с общим центром[2]. Мы примем термин *спиральное подобие*, предложенный Г.С.М.Коксетером и С.Л.Грейтцером в их замечательной книжке «Новые встречи с геометрией» (М., «Наука», 1978); другие названия — «поворотная гомотетия» и «центрально-подобное вращение». При спиральном подобии все прямые поворачиваются на один и тот же угол — это свойство было использовано в нашем третьем доказательстве. Другое его свойство нам понадобится ниже в одном из доказательств второго утверждения задачи.

Теорема Брахмагупты

Как мы видели (см. упражнение 1), прямая QM на рисунке 2 параллельна BD. Это наблюдение позволяет облечь первое утверждение нашей задачи в более изящную форму, известную как теорема Брахмагупты:

Если диагонали четырехугольника, вписанного в окружность, перпендикулярны, то перпендикуляр к стороне четырехугольника, проведенный через точку их пересечения, делит пополам противоположную сторону.

Точнее говоря, наше утверждение равносильно обратной теореме, которая моментально выводится из прямой доказательством «от противного» — если рассматриваемая в ней прямая (на рисунке 5 это прямая AE) делит попо-

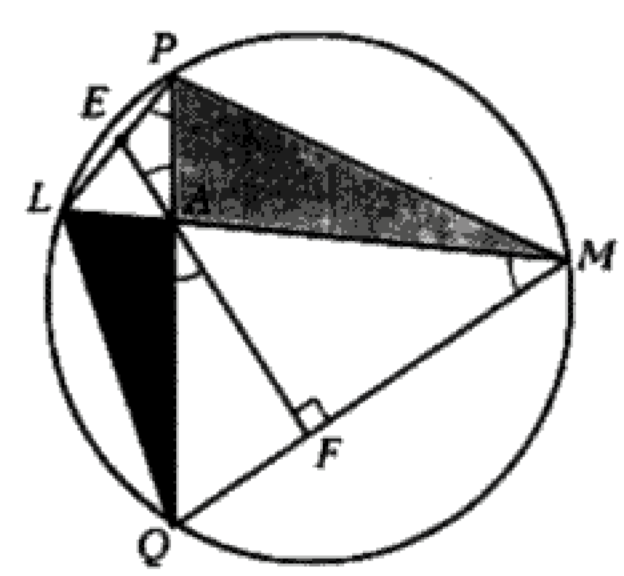

Рис. 5

лам какую-то сторону четырехугольника (сторону PL четырехугольника $PLQM$), то она перпендикулярна к противоположной стороне (QM).

Вы можете доказать эту теорему непосредственно, например, установив равенство четырех углов, отмеченных дужками на рисунке 5, или приспособить одно из доказательств, рассмотренных выше. Сейчас же мы сразу перейдем к ее красивому обобщению.

Представим, что треугольники AQL и AMP на рисунке 5 соединены в их общей вершине A шарниром. Повернем один из треугольников относительно

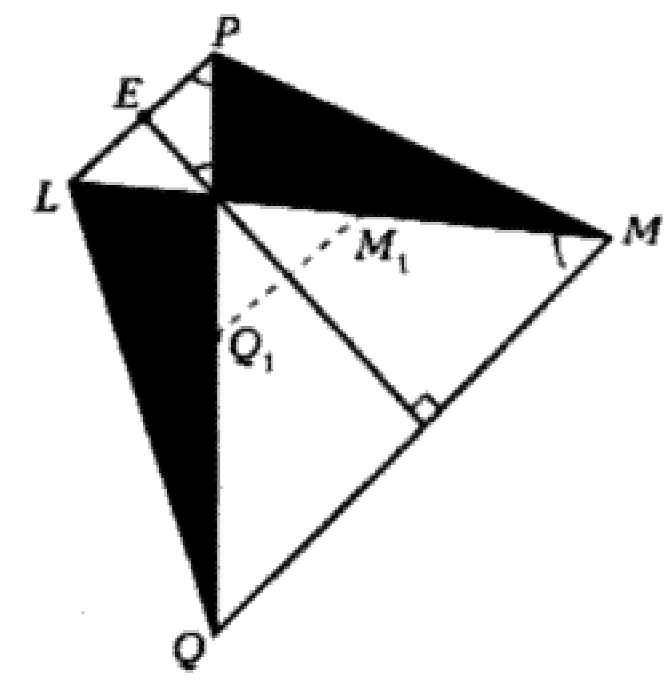

Рис. 6

другого (рис.6). Оказывается, что при этом утверждение теоремы Брахмагупты (для сторон PL и QM) останется в

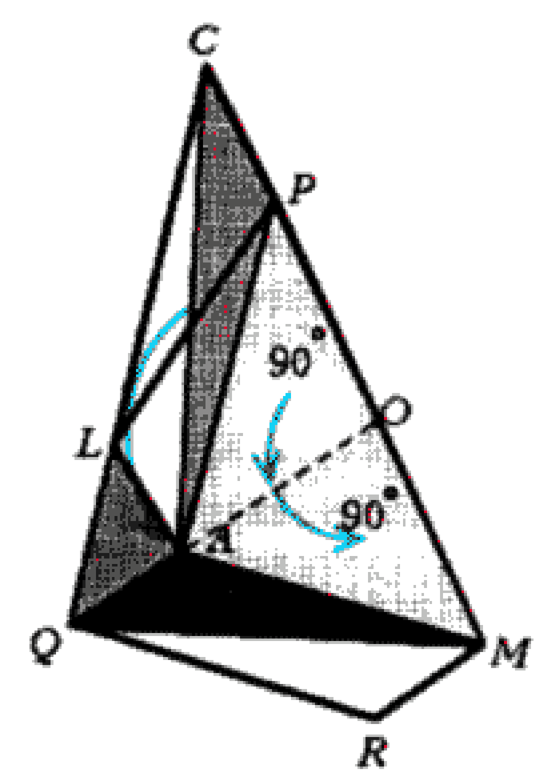

Рис. 7

силе. Другими словами, *если при соединении точки A, взятой внутри четырехугольника $LPMQ$, с его вершинами образуются подобные прямоугольные треугольники ALQ и APM (с равными углами при L и P и при A, причем углы при A прямые), то перпендикуляр, опущенный из A на QM, при продолжении делит LP пополам.*

В частном случае, когда подобные треугольники, о которых здесь говорится, являются прямоугольными равнобедренными, этот факт хорошо известен. Его можно доказать так: достраиваем треугольники ALP и AQM до параллелограммов $ALCP$ и $AQRM$ (рис.7) и убеждаемся, что при повороте на 90° вокруг середины PM первый

[2] *Заметим, кстати, что любое преобразование подобия плоскости, сохраняющее ориентацию и отличное от параллельного переноса, можно представить именно в таком виде.*