Геометрические метаморфозы

В.ДУБРОВСКИЙ

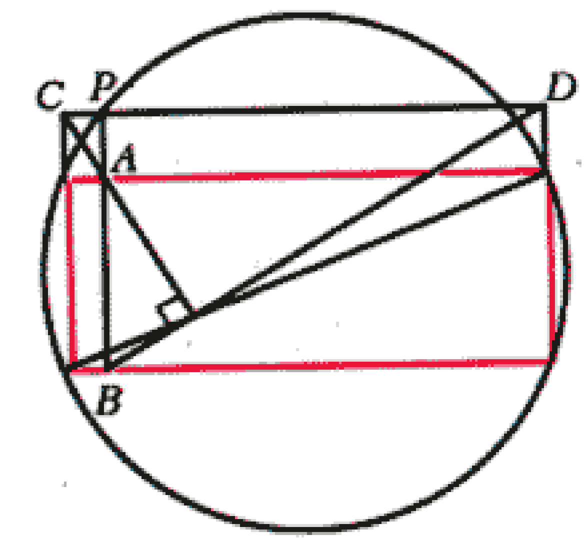

Рис. 1

Дерни за веревочку...
Ш.Перро. «Красная Шапочка»

Однажды, перелистывая старый «Квант», я наткнулся на такую задачу:

М546. *Из произвольной точки P окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры PA и PB на две его противоположные стороны и перпендикуляры PC и PD на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые AC и BD перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагонали прямоугольника.*

По какой-то уже забытой причине она привлекла мое внимание. И обнаружилось, что эта несколько тяжеловесная по формулировке задача имеет неожиданно много разнообразных решений, использующих целый ворох полезных и поучительных идей. Оказалось также, что оба ее утверждения можно обобщить и прийти к интересным и важным геометрическим теоремам, давно ставшим классикой. На самом деле, эта ситуация достаточно типична для элементарной геометрии — собрания фактов, настолько тесно переплетенных друг с другом, что стоит «потянуть» за один из них, и почти наверняка вслед за ним потянется длинная цепочка других, принадлежащих к, казалось бы, далеким друг от друга областям этой красивейшей области науки (пожалуй, и искусства).

Один из методов, эффективно работающих в этой задаче, хорошо известен в... политике. Он выражается тремя словами: «разделяй и властвуй!». В применении к математике это означает выделение из задачи важных фрагментов, каждый из которых можно исследовать независимо от остальных. В нашем случае такое разделение напрашивается само собой: в задаче имеется два утверждения — о перпендикулярности (прямых AC и BD) и о «конкурентности»[1] (этих же прямых и диагонали прямоугольника). Эти утверждения мы подвергнем серии трансформаций, которые изменят их почти до неузнаваемости, но позволят выделить действительно существенные для их справедливости условия и в то же время «стереть случайные черты». И основным инструментом этих «геометрических преображений» будут — что неудивительно — «геометрические преобразования»: переносы, повороты, гомотетии... Мы увидим, как преобразования (в частности, такое мощное, но нечасто используемое преобразование, как «спиральное подобие») можно применять в доказательстве свойств, которые на первый взгляд не имеют никакого к ним отношения.

Но прежде чем приступить к осуществлению намеченного здесь плана, попробуйте решить нашу задачу самостоятельно. Очень может быть, что вы найдете решение, отличное от приведенных ниже — что ж, тем интереснее вам будет познакомиться с ними.

Начнем с первого утверждения задачи.

Доказательства перпендикулярности

На чертеже задачи (рис.1) масса прямых углов, и едва ли не первое, что приходит в голову — попробовать доказать, что угол между AC и BD равен одному из них.

1. Доказательство сдвигом и симметрией. Обозначим данный прямоугольник через KLMN (рис.2). Отрезки AC и BD — это диагонали прямоугольников PALC и PDNB. Их вторые диагонали, PL и PN, перпендикулярны, так как LN, будучи диагональю прямоугольника KLMN, является диаметром нашей окружности. А теперь остается заметить, что *если провести по диагонали в каждом из двух произвольных прямоугольников с соответственно параллельными сторонами, то угол между ними равен углу между двумя другими диагоналями* (рис.3,а). Это становится очевидным, если параллельно перенести один из прямоугольников так, чтобы его центр совпал с центром второго прямоугольника (рис.3,б): при параллельном сдвиге одной из любых двух данных прямых угол между ними не изменяется, а для прямоугольников, полученных после сдвига, рассматриваемые углы равны просто потому, что они симметричны (относительно любой из двух осей симметрии образовавшегося «креста»).

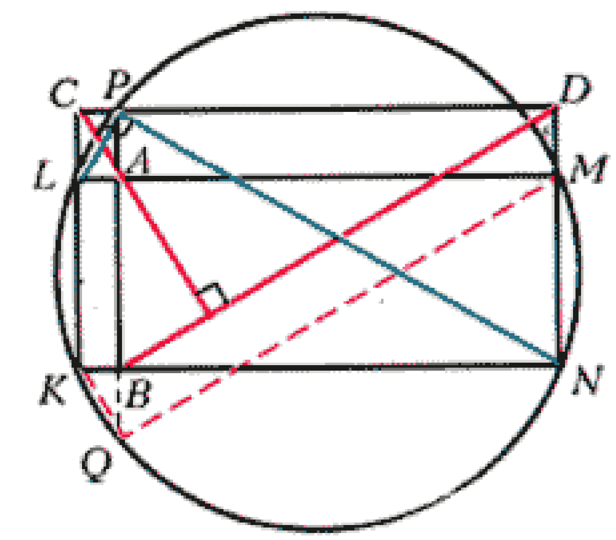

Рис. 2

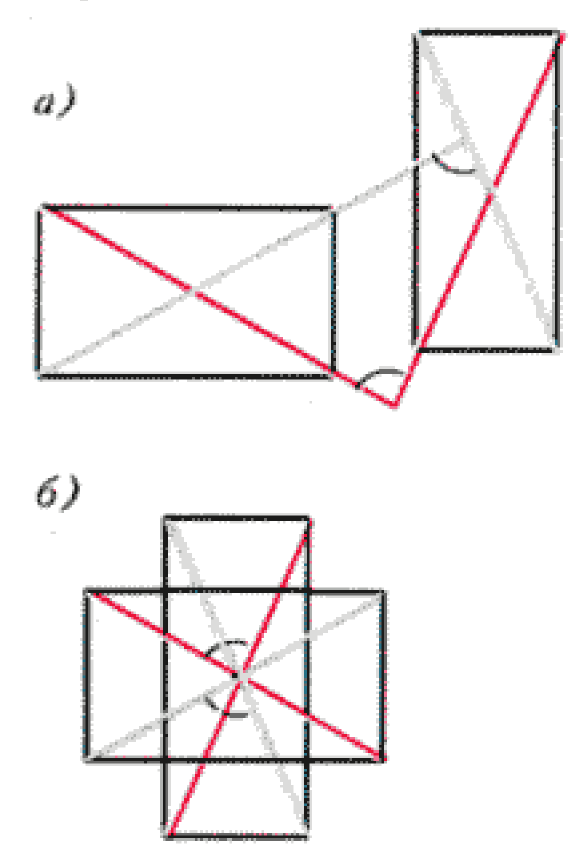

Рис. 3

---

[1] *Конкурентными (дословно — «сбегающимися») называют несколько прямых, имеющих общую точку.*

Эта статья была опубликована в журнале «Квантум» в 1996 году.