Гравитационная машина

А.САМБЕЛАШВИЛИ

В 1994 ГОДУ на Международном турнире юных физиков в Голландии его участникам была предложена такая задача:

«Имеется массивная стальная плитка, расположенная горизонтально и колеблющаяся вдоль вертикали по гармоническому закону с амплитудой A ≈ 3 мм и частотой ω ≈ 500 с$^{-1}$. На плитку кладут маленький (радиусом ≈ 1 мм) стальной шарик, который вследствие соударений с плиткой начинает подпрыгивать вверх-вниз. Определите, как меняется средняя (за некоторый промежуток времени) максимальная высота подскока шарика со временем, и объясните полученные результаты».

Задача эта привлекательна своей кажущейся простотой и одновременно связью с фундаментальными физическими представлениями. О них будет сказано ниже, а пока попробуем ответить на вопрос задачи, т.е. определить (хотя бы качественно) зависимость средней максимальной высоты подскока шарика от времени. Быстрее всего это можно сделать, проведя эксперимент. Собрать установку, описанную в задаче, — дело несложное. Существует множество различных способов заставить плитку колебаться, один из них — присоединить ее с помощью кривошипного механизма к обыкновенному электромотору. Чтобы шарик подпрыгивал вдоль вертикали и не отскакивал в стороны, над плиткой можно поставить трубку с прозрачными стенками. Если же вы умеете программировать, то вам не составит большого труда смоделировать задачу на компьютере.

Тот, кто не пожалеет времени на создание модели, вознаградит себя наблюдением удивительного, на первый взгляд, явления: средняя высота подскока шарика будет постепенно увеличиваться с течением времени до тех пор, пока не достигнет некоторого предельного значения. Этот эффект получил название «ускорения», а сама установка — «гравитационной машины», поскольку гравитационое притяжение служит механизмом, возвращающим шарик назад к плитке.

Попробуем объяснить увиденное. Прежде всего запишем законы движения шарика и плитки, направив ось X вертикально вверх, а за начало координат выбрав положение равновесия, относительно которого колеблется плитка (см.рисунок):

$$x_{ш}(t) = x_{ш}(t_n) + v_n(t - t_n) - \frac{g(t-t_n)^2}{2},$$

$$x_{п}(t) = A\sin\omega t,$$

где $x_{ш}(t)$ — координата шарика в момент времени t, $x_{п}(t)$ — координата плитки, t_n — момент n-го по счету столкновения шарика с плиткой, v_n — абсолютная величина скорости шарика непосредственно после n-го столкновения. Первое уравнение описывает движение шарика в промежутках между соударениями. При соударениях его скорость меняется скачком. Пусть t_{n+1} — момент времени $(n+1)$-го столкновения. В этот момент скорость плитки $v_{п} = x'_{п}(t_{n+1}) = A\omega\cos(\omega t_{n+1})$. Примем в качестве допущения (оно оправдывается экспериментом), что максимальная высота подскоков шарика велика по сравнению с амплитудой колебаний плитки. Это позволит нам считать скорости шарика (здесь и далее под скоростью подразумевается ее абсолютная величина) сразу после n-го и непосредственно перед $(n+1)$-м столкновениями приблизительно равными. Полагая соударения абсолютно упругими, нетрудно получить выражение для скорости шарика непосредственно после $(n+1)$-го соударения:

$$v_{n+1} = v_n + 2v_{п} = v_n + 2A\omega\cos\varphi_{n+1},$$

где $\varphi_{n+1} = \omega t_{n+1}$ — фаза колебаний плитки в момент $(n+1)$-го соударения.

Последнее соотношение показывает, что при $\varphi_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ $\cos\varphi_{n+1} > 0$, т.е. плитка в момент соударения движется вверх, навстречу шарику. В результате столкновения скорость шарика возрастает, следовательно, возрастает его энергия $mv_n^2/2$ и максимальная высота подскока $h_n = v_n^2/(2g)$. При $\varphi_{n+1} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ $\cos\varphi_{n+1} < 0$ — плитка в момент соударения движется вниз, как бы убегая от шарика, поэтому его скорость, энергия и максимальная высота подскока в результате столкновения уменьшаются. Таким образом, максимальная высота подскока полностью зависит от того, какую фазу φ_n имела плитка в момент столкновения t_n.

Наблюдаемое в эксперименте увеличение с течением времени средней максимальной высоты подскока шарика наводит на мысль о том, что шарик чаще сталкивается с плиткой, движущейся навстречу ему, чем с движущейся от него. Для обоснования этого утверждения рассмотрим систему шарик — плитка в момент времени t^*, в который шарик падает вниз и имеет координату $x(t^*) = A$. Для движения плитки в момент t^* возможны несколько случаев.

1) Фаза плитки $\varphi(t^*) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ (рис.*а*). Плитка движется вверх, навстречу шарику, следовательно, столкновение приведет к увеличению энергии шарика.

2) $\varphi(t^*) \in \left[\frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис.*б*). Плитка движется вниз и имеет координату, близкую к $-A$. При достаточно малом ε за время падения шарика в пределах $x \in [-A, A]$ плитка успеет достигнуть нижней точки $x = -A$ и изменить направление своего движения. В этом случае столкновение шарика с плиткой произойдет при их движении навстречу друг другу, и в результате энергия шарика увеличится.

3) $\varphi(t^*) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right]$ (рис.*в*). Плитка движется вниз, причем ее координата намного отличается от $-A$, так что за время падения шарика от положения