Поскольку, по формуле Ньютона — Лейбница,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^x = \operatorname{arctg} x,$$

получаем тождество

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Оценим $R_n(x)$ так же, как мы поступали, раскладывая в ряд логарифм ($-1 \le x \le 1$):

$$|R_n(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^{|x|} t^{2n}dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}.$$

Если $|x| \le 1$, то

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{2n+1},$$

т.е. $R_n(x) \to 0$ при всяком $x$ из отрезка $[-1;1]$. Мы получили разложение арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1},\ x \in [-1;1]. \quad (8)$$

## Формула Лейбница

Мы уже знаем, что разложение в ряд арктангенса справедливо и при $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в (8), получаем

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

**Упражнение 3.** Подставьте в формулу (8) какие-нибудь другие числа (вместо $x$). Какие формулы для числа $\pi$ вы при этом получите?

Поиски формулы для числа $\pi$ давали математикам надежду на то, что им удастся решить проблему квадратуры круга. Однако, несмотря на красоту получавшихся формул, никаких сдвигов в проблеме квадратуры не было вплоть до конца XIX века, когда немецкому математику Линдеману удалось доказать, что число $\pi$ трансцендентно, т.е. не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами, и, тем самым, построить квадрат, равновеликий данному кругу, нельзя.

И еще одно замечание. Разложение в ряд арктангенса и до Лейбница было известно Грегори — ученику Ньютона, Однако Грегори этот свой результат нигде не публиковал, так что Лейбницу, по-видимому, пришлось самому «открывать» разложение арктангенса.

# НАША ОБЛОЖКА

## ХОЛОДНОЕ КИПЕНИЕ

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

Описанный эксперимент наглядно иллюстрирует физическую сущность процесса кипения: кипение начинается тогда, когда давление насыщенного пара при температуре жидкости сравнивается с давлением жидкости. В этом случае образующиеся внутри жидкости пузырьки, наполненные паром, перестают схлопываться, растут, всплывают к поверхности и там лопаются. Для поддержания заметного кипения необходим приток энергии, компенсирующий потери на интенсивное парообразование.

Возле открытой поверхности воды в нашей пробирке кипение начинается примерно при 100 °С, когда давление насыщенных паров воды равно давлению окружающего воздуха, т.е. примерно 100 кПа. Интенсивный поток пара вытесняет из пробирки почти весь воздух, и после закрывания пробирки в ее свободной части остается практически только насыщенный пар. При обливании пробирки холодной водой температура и давление пара падают, соответственно уменьшается и давление на воду, а температура ее измениться не успевает. Значит, давление воды становится ниже давления насыщенного пара при температуре воды, и ... начинается кипение. Энергия, необходимая для поддержания кипения, берется у остывающей воды. Поэтому через некоторое время температура воды понизится (а давление в пробирке повысится) и кипение прекратится.

При последовательных поливаниях сначала холодной, а затем и ледяной водой температура воды и насыщенного пара постепенно уменьшаются, и в конце опыта давление в пробирке оказывается совсем маленьким (так, при 0 °С давление насыщенного пара почти в 17 раз меньше атмосферного). Чтобы проверить это, достаточно открыть пробку — вы услышите хлопок воздуха, входящего в пробирку. Есть еще один, очень красивый, способ убедиться в том, что над водой находится «почти пустота». Попробуйте установить пробирку вертикально и резко встряхнуть ее в вертикальном направлении — вы услышите необычный звук, как будто в пробирке находится не вода, а нечто жесткое. Причина как раз и состоит в отсутствии над водой воздуха, препятствующего ее свободному резкому движению.

*С.Кротов, А.Черноуцан*